Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci tradotto in Italiano

Parte Prima - Capitoli da I a VII - ARITMETICA

Parte Seconda - Capitolo XII (parziale)

A cura di

Luciano Ancora

Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci tradotto in Italiano

Parte Prima - Capitoli da I a VII - ARITMETICA

Parte Seconda - Capitolo XII (parziale)

A cura di

Luciano Ancora

Madame Arithmetica

INDICE

INTRODUZIONE

Tempo fa, leggendo un articolo di storia della matematica, ho appreso con meraviglia che il *Liber Abaci* di *Leonardo Fibonacci*, un testo di grande interesse storico per l'influenza che ha avuto nello sviluppo della matematica occidentale, non era stato ancora tradotto in lingua italiana. Ho quindi considerato questa opportunità, accarezzando l'idea di svolgere io stesso questo lavoro, avendone il tempo (sono un pensionato) e potendo utilizzare tutto il materiale necessario, presente in rete in latino originale [1].

L'impresa all'inizio poteva sembrare al di sopra delle capacità di una singola persona, ma poi mi sono accorto che la cosa era fattibile, potendosi eliminare dal libro circa i 2/3 del suo volume totale, cioè i capitoli dall' 8° al 13°, in cui sono trattati argomenti non attinenti alla scienza matematica propriamente detta: come problemi relativi al calcolo dei prezzi delle merci, dei guadagni, degli interessi e sconti, dei cambi fra monete diverse, fino al computo delle operazioni di scambio delle merci e quello degli utili o perdite delle società; insomma, un vero e proprio trattato di *ragioneria*. Ed ancora, nei capitoli 12° e 13°, problemi di vario tipo che l'autore chiama *questiones erratice*, la maggior parte dei quali indicheremmo oggi come *matematica ricreativa*.

Mi sono quindi limitato, nel mio lavoro di traduzione, alle due parti essenziali del Liber Abaci, la prima dedicata all'*aritmetica* e la seconda dedicata all'*algebra*.

Nella prima parte (capitoli da 1 a 7) Leonardo introduce le cifre indo-arabiche ed espone un nuovo sistema, basato sulla *numerazione posizionale*, per eseguire con esse le operazioni aritmetiche fra numeri interi. Gli antichi romani, che non potevano utilizzare il loro modo di scrivere i numeri per eseguire i calcoli come si fanno oggi, ricorrevano invece al calcolo pratico con i sassolini (*calculi* in latino), che mettevano entro linee verticali segnate per terra a formare colonne. Nell'ultima colonna ogni sassolino valeva 1 unità, nella penultima 10 unità, nella terzultima 100, e così via. Se nell'ultima colonna si arrivava a 10 sassolini, questi venivano sostituiti da un unico sassolino, da mettere nella penultima colonna. Quindi, gli antichi romani avevano già acquisito l'idea di *valore posizionale*. Il merito degli arabi è stato quello di introdurre le cifre indiane, in sostituzione dei sassolini dei romani, e di sviluppare con queste un nuovo metodo per calcolare, o *algoritmo*, che diffuso poi dal Fibonacci con il Liber Abaci, ha fornito agli uomini del Rinascimento quanto occorreva per compiere il grande e decisivo progresso, al di là della matematica greca, verso la matematica moderna. C'è da chiedersi quale sia stata la causa che ha determinato una così fortunata scelta da parte degli arabi. Probabilmente, come spesso accade per le grandi scoperte, deve essere stata la *necessità*: è più facile scrivere sulla sabbia, anziché reperire, al bisogno, dei sassi nel deserto.

---

[1] - Si tratta principalmente dell'edizione in latino del Liber Abaci di Leonardo Pisano, pubblicata da Baldassarre Boncompagni nel 1857.

Vi è poi la parte riservata all'algebra (capitoli 14 e 15) che costituisce il primo vero trattato di algebra scritto in lingua latina. Qui Leonardo espone gli algoritmi per calcolare le radici quadrate e cubiche, e le regole di calcolo per radicali quadratici e cubici. Quindi, introduce una nuova disciplina, l'*algebra*, rivelando i legami esistenti fra questa e la geometria euclidea. Era infatti noto allora, che alcune proposizioni contenute nel secondo libro degli *Elementi* di Euclide venivano usate dai matematici greci per risolvere problemi che successivamente, con l'avvento dell'algebra, furono ricondotti alla risoluzione delle *equazioni di secondo grado*. Proprio per questo motivo qualcuno ha definito il secondo libro degli Elementi come quello dell'*algebra geometrica.*

La ricostruzione dell'evoluzione di questa nuova disciplina introdotta da Leonardo Pisano, l'algebra, nei secoli dal tredicesimo al quindicesimo, è possibile attraverso lo studio dei cosiddetti *Trattati d'abaco*, scritti successivamente dai *Maestri d'abaco*, che in quel periodo diffondevano in Europa l'insegnamento delle cifre indo-arabiche e delle relative tecniche di calcolo. In essi si vede come l'attenzione degli algebristi si sia spostata gradatamente, con difficoltà, dalla risoluzione delle equazioni di secondo grado contenute nel Liber Abaci, a quelle di terzo e quarto grado, con le formule trovate poi da Niccolò Tartaglia e da Ludovico Ferrari, nel sedicesimo secolo. Si può dire che la matematica moderna ha avuto inizio quattro secoli fa, quando la macchina algebrica ha cominciato ad essere applicata anche alla geometria, e lo studio delle curve, figure e superfici si è tradotto nello studio di opportune equazioni.

Dell'omesso capitolo dodicesimo, ho ritenuto poi opportuno tradurre due dei numerosi problemi in esso proposti. Il primo è quello in cui si chiede di calcolare *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinantur*, nella cui soluzione compaiono per la prima volta i primi dodici termini di quella che sei secoli più tardi verrà denominata *la successione di Fibonacci.* Il secondo è quello in cui si propone di sommare una sequenza di potenze del numero due su una scacchiera, cioè, il famoso problema nato dalla leggenda sulla nascita del gioco degli scacchi, o *Leggenda di Sissa Nassir*. Quest'ultimo problema costituisce anche un esempio di come sia stato possibile, con il sistema di numerazione posizionale indo-araba, ricavare un numero spropositato, come 340 282 366 920 938 463 483 374 607 431 768 211 456, che con il sistema di numerazione romana sarebbe stato ben difficile, o forse impossibile, ottenere.

Parte Prima - Capitoli da 1 a 7 - ARITMETICA

PROLOGO

Inizia il Libro dell'Abaco composto da Leonardo,
figlio di Bonacci Pisano, nell'anno MMCCII.

Mi avete scritto, mio signore e maestro Michele Scoto, sommo filosofo, di trascrivere per voi il libro sul numero che tempo fa avevo composto; perciò, per assecondare la vostra richiesta, l'ho corretto sottoponendolo ad una accurata revisione in vostro onore e per l'utilità di molti altri. Così, nel correggerlo ho aggiunto alcune nozioni necessarie e ho eliminato alcuni passi superflui. In questo libro ho pubblicato l'intera dottrina dei numeri secondo il metodo degli Indiani, metodo che in questa scienza stessa ho assunto come il più efficace. E poiché le scienze dell'aritmetica e della geometria sono legate tra loro e si suffragano a vicenda, la dottrina del numero non può essere insegnata nella sua interezza, se non con l'intersezione di alcuni principi geometrici, di nozioni che si riferiscono alla geometria, che si applicano, in quest'ambito, soltanto secondo il metodo numerico, metodo che è stato stabilito in base a molte prove e dimostrazioni fatte con le figure geometriche. Ma tuttavia in un altro libro, che ho composto sulla pratica della geometria, ho spiegato con maggiore dovizia di particolari i principi che attengono alla geometria e parecchi altri, dimostrandoli ad uno ad uno con figure e prove geometriche. Certo, questo libro è relativo più alla pratica che alla teoria e per questo coloro che con il suo aiuto vorranno conoscere bene la pratica di questa scienza del numero, è necessario che con un continuo uso e con un lungo esercizio si dedichino con molta diligenza alle sue applicazioni, sicché, una volta trasformatasi la conoscenza teorica in abito attraverso la pratica, a tal punto siano concordi la memoria e l'intelletto con le mani e le cifre, da armonizzarsi naturalmente riguardo ad un medesimo scopo con l'aiuto di tutti i mezzi come con un solo impulso e anelito in un solo e medesimo istante: e solo quando il discepolo avrà ottenuto l'abitudine, passo dopo passo potrà facilmente pervenire al perfetto compimento di tale pratica. E perché la dottrina fosse esposta più facilmente, ho diviso questo libro in quindici capitoli, in modo tale che il lettore possa trovare con maggiore rapidità qualsiasi argomento voglia tra questi. Ma se invece in quest'opera si trova un'insufficienza o una mancanza, la sottopongo alla vostra correzione.

Quando mio padre, scrivano pubblico presso la dogana di Bugia per conto dei mercanti pisani, fu incaricato di dirigerla, essendo io ancora fanciullo mi fece andare presso di lui. Essendosi reso conto dell'utilità e dei vantaggi che me ne sarebbero venuti in seguito, volle che là per un certo tempo stessi a studiare l'abaco e su esso venissi istruito. Ivi fui introdotto in tale arte da un mirabile insegnamento per mezzo delle nove figure degli Indi. La conoscenza di tale arte molto mi piacque rispetto alle altre. Successivamente con studio assiduo e impegnandomi in discussioni, giunsi a comprendere quanto di essa si studiava in Egitto, Siria, Bisanzio, Sicilia e Provenza, luoghi che ripetutamente visitai per i miei viaggi commerciali.

Per questo considerai l'algoritmo e gli archi di Pitagora quasi un errore in confronto al procedimento degli Indi. Riassunto in breve tale procedimento degli Indi, studiandolo più attentamente e aggiungendovi qualcosa di mia iniziativa e altro ancora apponendovi delle sottigliezze dell'arte geometrica di Euclide, mi sono impegnato a comporre nel modo più chiaro possibile questo libro diviso in 15 capitoli, presentandovi con dimostrazioni quasi tutto quello che ho inserito. E questo perché coloro che sono attirati da questa scienza ne vengano istruiti in modo perfetto, e i popoli latini non se ne trovino esclusi come è stato fino ad oggi. Se per caso ho tralasciato meno o più del giusto o del necessario, prego che mi sia concessa venia, visto che non c'è nessuno cui manchi difetto per quanto sia in tutto e dovunque prudente.

Capitolo 1

Inizia il primo capitolo.

Le nove figure indiane sono:

9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Con queste nove figure, e con il segno 0 che gli arabi chiamano zephir, si scrive qualsiasi numero, come è mostrato di seguito. Un numero è una somma di unità, o un insieme di unità, e con la loro addizione i numeri aumentano, con un ritmo senza fine. In primo luogo, sono composti dalle unità quei numeri che vanno da uno a dieci. Secondo, dalle decine i numeri che vanno da dieci fino a cento. Terzo, dalle centinaia i numeri da cento fino a mille. Quarto, dalle migliaia i numeri da mille fino a diecimila, e quindi, per una sequenza infinita di passaggi, un numero qualsiasi è costruito dall'unione dei numeri precedenti. Il primo posto nella scrittura dei numeri inizia a destra. Il secondo segue il primo a sinistra. Il terzo segue il secondo. Il quarto, il terzo e il quinto, il quarto, e quindi sempre a sinistra, di posto in posto. Quindi, la cifra che si trova al primo posto rappresenta se stessa; cioè, se al primo posto c'è la figura dell'unità, essa rappresenta uno; la figura di due, rappresenta due; la figura di tre, tre, e così per quelle che seguono, fino alla figura di nove; le nove cifre che saranno al secondo posto rappresenteranno altrettante decine, come nel primo posto le unità; cioè, se la figura uno occupa il secondo posto, essa denota dieci; la figura due, venti; la figura tre, trenta; la figura nove, novanta.

La figura che è nella terza posizione indica il numero delle centinaia, come nella seconda le decine, o nella prima le unità; se la cifra è uno, cento; se la cifra è due, duecento; se la cifra è tre, trecento, e se la cifra è nove, novecento. Quindi, la figura che è nel quarto posto denota le migliaia, come nel terzo le centinaia, nel secondo le decine, e nel primo le unità; e così, aggiungendo sempre posti, il numero aumenta. Chiariremo questo principio mostrandolo con figure. Se la figura sette è al primo posto e la tre al secondo, entrambe insieme denotano 37; o permutando, la figura tre nel primo e la figura sette nel secondo, indicano 73. Ancora, se la cifra quattro è al primo posto e l'unità al secondo, cioè 14, sarà indicato quattordici; oppure, se la figura dell'unità è al primo posto, e la figura quattro al secondo, cioè 41, sarà indicato quarantuno. Ancora, nel primo 2 e nel secondo 7, danno 72; il contrario dà 27. Se si vuole scrivere settanta, si mette al primo posto 0, e dopo si mette la figura sette, cioè 70; se ottanta, lo zero è seguito da otto, cioè 80; questa dimostrazione mostra come si può scrivere qualsiasi numero da dieci fino a cento con due figure. Con tre possiamo scrivere da cento fino a mille; se la figura otto è al primo posto, la figura cinque al secondo, e l'unità al terzo, cioè 158, sarà indicato cento cinquanta otto; e permutando, se l'unità è al primo posto, la figura cinque al secondo, e la figura otto al terzo, 851, sarà indicato ottocento cinquanta uno; o permutando, se la figura otto è al primo posto, l'unità al secondo, e la

figura cinque al terzo, sarà indicato 518. Permutando ancora, la figura cinque al primo posto, la figura otto al secondo, e l'unità al terzo, sarà indicato 185. Se l'unità è al primo posto, la figura otto al secondo, e la figura cinque al terzo, sarà indicato 581; tre unità indicano centoundici. Ancora, se si vuole scrivere cinquecento, nel primo e nel secondo posto si metterà lo zero, e nel terzo la figura cinque, in questo modo, 500; e quindi si sarà in grado di scrivere un numero qualsiasi di centinaia con due zeri. Se vorrete scrivere centinaia con decine e senza unità, si mette in primo luogo lo zero, nel secondo le decine, e nel terzo le centinaia che volete. Ad esempio, se nel primo posto è lo zero, nel secondo la figura nove, e nel terzo figura due, sarà indicato 290. Se poi si vuole scrivere centinaia con unità e senza decine, al secondo posto, cioè al posto delle decine, si mette lo zero, al primo il numero di unità che si vogliono, e nel terzo, la figura due, 209; Quindi, in base al principio di cui sopra, è dimostrato che si può scrivere con tre figure qualunque numero si desideri da cento fino a mille. E con quattro, da mille fino a diecimila, come mostrato nelle figure che seguono.

M I	MM XXIII	MMM XXII	MMM XX	MMMMM DC	MMM	M CXI	M CCXXXIIII	MMMM CCCXXI
1001	2023	3022	3020	5600	3000	1111	1234	4321

Proseguiamo con gli altri numeri. Con cinque figure si scrivono tutti i numeri da diecimila fino a centomila. Con sei, da centomila fino a mille mila, e quindi il numero aumenta, cifra dopo cifra. Onde, se accade che non si possa leggere né capire un numero con molte figure, a causa del gran numero di esse, allora avremo cura di mostrare come esso debba essere letto e compreso.

Pertanto, per la prima figura, cioè la figura al primo posto, si dica uno.

Della seconda, che è al secondo posto, si dica dieci.

Della terza, che è al terzo posto, si dica cento, e la si accenti nella parte superiore.

Della quarta cifra del numero, si dica mille, e la si accenti nella parte inferiore.

Della quinta si dica diecimila.

Della sesta si dica centomila, e la si accenti nella parte superiore.

Della settima si dica mille mila, e la si accenti nella parte inferiore.

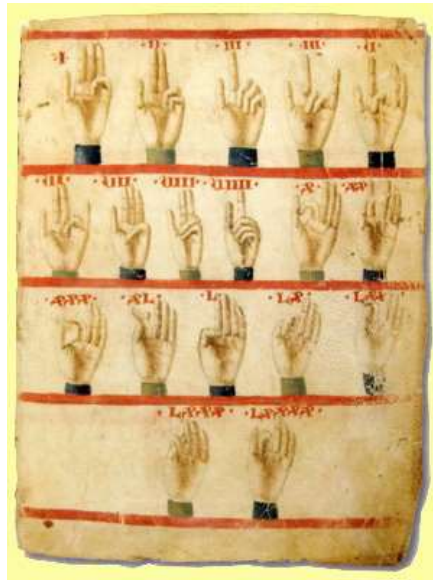
Dell'ottava si dica diecimila mila.

Della nona si dica centomila mila, e la si accenti nella parte superiore.

Della decima si dica mille mila mila, e la si accenti nella parte inferiore; e così via, mediante questi tre numeri, cioè le migliaia, le decine di migliaia, e le centinaia di migliaia, accentando le migliaia nella parte inferiore e le centinaia di migliaia nella parte superiore, si può costruire fino all'ultimo posto il numero che si vuole studiare. Si cominci dunque a leggere il numero dall'ultimo posto, attraverso i suddetti accenti, dicendo sempre per gli accenti inferiori tante migliaia di migliaia quanti accenti vi sono prima nella parte inferiore verso il primo posto, e per gli accenti superiori, dicendo tante centinaia di migliaia quanti accenti vi sono prima nella parte inferiore, sempre verso il primo posto del numero; e per le figure non accentate dopo il quarto posto del numero, si dicano tante decine di migliaia, quanti accenti

vi sono prima di esse nella parte inferiore; e quindi si potrà conoscere e leggere qualsivoglia numero di molte figure. E affinché questo sia meglio capito proponiamo un numero di otto figure, 87654321. Della figura 1 che è al primo posto, si dice uno; della figura 2, che è nel secondo, si dice dieci; della 3, che si trova nella terza posizione, si dice cento, e la accentiamo nella parte superiore. Della figura 4, che è al quarto posto, si dice mille, e la accentiamo nella parte inferiore, come è mostrato nel soprascritto numero. Della figura 5, che è al quinto posto, si dice diecimila; della figura 6, che è nella sesta posizione, si dice centomila, e si accenta nella parte superiore; della figura 7, che è al settimo posto, si dice mille mila, e si accenta nella parte inferiore; della figura 8, all'ultimo posto, si dice dieci mila; quindi si ha nel numero sopraddetto ottantasette mille mila, a causa dei due accenti inferiori, dei quali uno inferiore al 7 e l'altro inferiore al 4, e inoltre sei cento cinquanta quattro mila, e inoltre trecentoventuno. Vi proponiamo un altro numero, di nove cifre, 257604813; dall'ordine degli accenti si riconosce che esso contiene in sé duecento cinquanta sette mila mila, e seicento quattro mila, e ottocento tredici. Proponiamo ancora un altro numero, di tredici figure, 1007543289081; dagli accenti si riconosce che esso è mille, e sette mila mila mila, e cinquecento quaranta tre mila mila, e duecento ottanta nove mila, e ottanta uno. Possiamo ora insegnare un'altra regola semplice in modo che la maggior parte di voi sia in grado di leggere rapidamente un numero di molte figure. Ad esempio, proponiamo ora un numero di 15 cifre, 678935784105296; staccate le prime tre figure, vale a dire 296, sopra ogni tre si disegna una virgola a modo di arco come nell'esempio precedente; e si legge per ogni virgola; e le tre figure che sono all'inizio si staccano e si leggono come sono; e quindi tu dici: seicento settanta otto mila mila mila mila, in quanto vi sono quattro virgole, e novecento trenta cinque mila mila mila, in quanto vi sono tre virgole, e settecento ottanta quattro mila mila, in quanto vi sono due virgole, e cento cinque mila, in quanto vi è una virgola, e duecento novanta sei, per le tre figure staccate all'inizio; e se per ultimo rimane una figura o due, le metti sotto un'ultima virgola, e le leggi tutte e quattro o cinque insieme, e quindi sarai in grado di leggere un numero di quante figure si voglia.

Secondo quanto scritto sopra, attraverso l'uso frequente si possono ben conoscere le predette figure e i loro posti; coloro che vogliono conoscere l'arte del calcolo, le sue sottigliezze e ingegnosità, devono conoscere il calcolo con i dati in mano, una sapientissima invenzione dell'antichità usata dai maestri della matematica. I segni sono questi. La curvatura del mignolo della mano sinistra sopra il centro del palmo della mano denota 1. Con la curvatura dello stesso dito, dell'anulare e il dito medio sul centro del palmo si intende 4. Con la curvatura del dito medio, 5; dell'anulare, 6. Ancora, col posizionamento del mignolo verso l'alto sopra il palmo, si indica 7, e se sono sopra quel posto il mignolo e l'anulare, si indica 8; quindi, il posizionamento di questi ultimi col dito medio sopra lo stesso posto, indica 9. Con l'estremità del dito indice sul nodo del pollice a formare un cerchio, si denota 10. Con il pollice e l'indice estesi e che si toccano, 20. Con le loro estremità unite in cerchio, 30. Con il pollice posto sulla parte esterna del

dito indice, 40. Con la curvatura del pollice sopra l'inizio del dito indice, 50. Con la curvatura del dito indice sopra il pollice curvo, 60. Con la curva del dito indice sopra l'estremità del pollice esteso, 70. Con la curvatura del dito indice sopra la curva del pollice esteso, 80. Con la curvatura dell'intero indice su se stessa, 90. Inoltre, le centinaia e le migliaia sono realizzate nella mano destra nello stesso ordine, cioè il segno dell'unità rende 100 nella mano destra; due rende 200; dieci rende mille, e il segno di novanta fa 9000, come nei disegni delle mani mostrati nelle pagine seguenti (vedi figura). Tutti i restanti numeri da dieci fino a diecimila sono quindi costruiti nelle mani con questi segni in questo modo; col segno di venti e il segno di tre si costruisce 23; col segno di tremila e il segno di cinquecento si costruisce nella mano destra tremilacinquecento, e quindi si capisce il resto.

Introduzione all'addizione e alla moltiplicazione dei numeri

Del due				
2	*e*	2	*fa*	4
2		3		5
2		4		6
2		5		7
2		6		8
2		7		9
2		8		10
2		9		11
2		10		12
Del tre				
3	*e*	3	*fa*	6
3		4		7
3		5		8
3		6		9
3		7		10
3		8		11
3		9		12
3		10		13
Del quattro				
4	*e*	4	*fa*	8
4		5		9
4		6		10
4		7		11
4		8		12
4		9		13
4		10		14
Del cinque				
5	*e*	5	*fa*	10
5		6		11
5		7		12
5		8		13
5		9		14
5		10		15
Del sei				
6	*e*	6	*fa*	12
6		7		13
6		8		14
6		9		15
6		10		16

Del sette				
7	*e*	7	*fa*	14
7		8		15
7		9		16
7		10		17
Dell'otto				
8	*e*	8	*fa*	16
8		9		17
8		10		18
Del nove				
9	*e*	9	*fa*	18
9		10		19
Del dieci				
10	*e*	10	*fa*	20
20	*e*	20	*fa*	40
20		30		50
20		40		60
20		50		70
20		60		80
20		70		90
20		80		100
20		90		110
30	*e*	30	*fa*	60
30		40		70
30		50		80
30		60		90
30		70		100
30		80		110
30		90		120
40	*e*	40	*fa*	80
40		50		90
40		60		100
40		70		110
40		80		120
40		90		130
50	*e*	50	*fa*	100
50		60		110
50		70		120
50		80		130
50		90		140

60	*e*	60	*fa*	120
60		70		130
60		80		140
60		90		150
70	*e*	70	*fa*	140
70		80		150
70		90		160
80	*e*	80	*fa*	160
80		90		170
90	*e*	90	*fa*	180
Fine delle addizioni				
Iniziano le moltiplicazioni				
Del due				
2	*volte*	2	*fa*	4
2		3		6
2		4		8
2		5		10
2		6		12
2		7		14
2		8		16
2		9		18
2		10		20
Del tre				
3	*volte*	3	*fa*	9
3		4		12
3		5		15
3		6		18
3		7		21
3		8		24
3		9		27
3		10		30
Del quattro				
4	*volte*	4	*fa*	16
4		5		20
4		6		24
4		7		28
4		8		32
4		9		36
4		10		40

Del cinque				
5	*volte*	5	*fa*	25
5		6		30
5		7		35
5		8		40
5		9		45
5		10		50
Del sei				
6	*volte*	6	*fa*	36
6		7		42
6		8		48
6		9		64
6		10		50
Del sette				
7	*volte*	7	*fa*	49
7		8		56
7		9		63
7		10		70
Dell'otto				
8	*volte*	8	*fa*	64
8		9		72
8		10		80
Del nove				
9	*volte*	9	*fa*	81
9		10		90
Del dieci				
10	*volte*	10	*fa*	100
10	*volte*	20	*fa*	200
Fine delle moltiplicazioni				

Scrivendo le addizioni e le moltiplicazioni in tabelle, sempre facendo uso delle mani per tenere i numeri, si disimpegna l'utilizzo delle mani per eseguire le addizioni e le moltiplicazioni di numeri.

Capitolo 2

Inizia il secondo capitolo sulla moltiplicazione dei numeri interi.

Dividiamo il capitolo due sulla moltiplicazione dei numeri interi in otto parti, al fine di comprenderne meglio le proprietà e differenze. La prima parte sarà sulla moltiplicazione di due figure per due, e anche di una figura per molte. La seconda, sulla moltiplicazione di tre figure per tre, e anche di due figure per tre. La terza, sulla moltiplicazione di quattro figure per quattro, e anche di due e tre figure per quattro. La quarta, sulla moltiplicazione di cinque figure per cinque. La quinta, sulla moltiplicazione di più di cinque figure, o di un qualsiasi numero, per se stesso. La sesta, sulla moltiplicazione di numeri di due posti per numeri dello stesso numero di posti, cioè due figure per due figure, e anche una figura per molte, moltiplicando tutto ciò che si tiene nelle mani. La settima, sulla moltiplicazione di tre figure per tre, allo stesso modo, moltiplicando ciò che si tiene nelle mani. L'ottava, sulla moltiplicazione di numeri in un altro modo.

Inizia la prima parte sulla moltiplicazione di due figure per due.

Un numero è detto essere moltiplicato per se stesso quando i numeri moltiplicati sono uguali, come 12 per 12, o 26 per 26. Un numero è detto essere moltiplicato per un altro numero quando i numeri moltiplicati sono diversi fra loro, come 12 per 37, o 46 per 59; quindi, come abbiamo promesso, insegniamo prima a moltiplicare per sé stessi i numeri di due posti, vale a dire da 10 a 100. Inoltre, se si vuole moltiplicare un numero qualsiasi di due posti per un numero qualsiasi dello stesso numero di posti, siano i numeri uguali o diversi, si scrive numero sotto numero, in modo che stessi posti siano sotto stessi posti; se i numeri sono diversi, il maggiore sia sotto il minore, e si cominci la moltiplicazione dei numeri al primo posto, come nelle tabelle scritte prima. Poi si moltiplica la figura al primo posto del numero superiore nella tabella scritta per la figura al primo posto dell'inferiore, e si scrivono le unità sul primo posto del numero scritto sopra, e per ogni decina si tiene uno nella mano sinistra; poi si moltiplica la figura al primo posto del numero superiore per la figura al secondo posto, cioè l'ultima figura del numero inferiore, e viceversa: la figura al primo posto in basso si moltiplica per l'ultima figura superiore, e si sommano tutte insieme con le decine conservate in mano; e ancora, le unità si scrivono sopra il secondo posto, e le decine sono tenute in mano. Infine, si moltiplica l'ultima figura del numero superiore per l'ultima in basso, e qualunque sarà il risultato della moltiplicazione è aggiunto alle decine tenute in mano, le unità saranno messe al terzo posto, e le decine nel quarto, e si avrà la moltiplicazione di numeri qualsiasi da dieci fino a cento. Ad esempio, se si vuole trovare la moltiplicazione di 12 per 12, si scrive due volte 12 in una tabella a sfondo bianco, in cui le lettere vengono facilmente eliminate, come

prima	4
	12
	12
seconda	44
	12
	12
ultima	144
	12
	12

mostrato in questo margine; il primo posto del numero inferiore è sotto il primo posto in alto, cioè la figura due sotto la figura due, e la seconda posizione in basso sotto la seconda in alto, cioè la figura uno sotto la figura uno, e si moltiplica due per due; si ha 4 che viene messo sopra entrambi i due, come nella illustrazione di prima. Ancora, il 2 superiore viene moltiplicato per la seconda posizione del numero inferiore; si ha 2 che è tenuto in mano, e di nuovo il 2 del numero inferiore si moltiplica per l'1 in alto; si ha 2 che si aggiunge al 2 tenuto prima; si ha 4, che viene messo sulle unità al secondo posto dopo la figura 4 messa prima, come mostrato nella seconda illustrazione; infine, si moltiplica 1 del numero superiore per 1 di quello inferiore, e si ha 1; si scrive questo nel terzo posto, vale a dire dopo la scritta 44, come mostrato nella terza ed ultima illustrazione. E in questo totale risulta la moltiplicazione di 12 per se stesso, cioè 144.

	9
prima	37
	37
	69
seconda	37
	37
la prova	1369
è 1	37
	37

Illustriamo ancora la moltiplicazione di 37 per 37. Si scrive il 37 sotto il 37, come abbiamo detto sopra dei 12, e si moltiplica il 7 per il 7; si ha 49; quindi il 9 si mette sopra entrambi i 7, come è mostrato nella prima illustrazione, e la figura quattro delle decine, che è in 49, è tenuta in mano; il 7 del numero superiore è moltiplicato per il 3 in basso, e il 7 in basso per il 3 in alto, e si sommano insieme; si ha 42 che si aggiunge al 4 mantenuto prima; si ha 46; le unità di 46, che sono 6, si scrivono sopra i 3 come mostrato nella seconda figura, e il 4 delle decine che sono in 46, si tiene in mano; quindi, il 3 del numero superiore viene moltiplicato per il 3 in basso; si ha 9 che si aggiunge al 4 che è in mano; si ha 13; il 3 di 13 viene messo al terzo posto e 1 al quarto, come nella terza e ultima illustrazione.

Per sapere se la moltiplicazione è corretta, si sommano le figure che sono nel 37 superiore, cioè il 3 e il 7; si ha 10, da cui si sottrae 9; rimane 1 che è tenuto in mano. Sempre allo stesso modo si sommano le figure del 37 in basso, e si sottrae 9; rimane 1; quindi si moltiplicano l'1 che rimane dal 37 superiore e l'1 che rimane dalla parte inferiore; si ha 1 che è chiamato il resto, ed è annotato nella tabella della moltiplicazione, come mostrato nella terza illustrazione; successivamente si sommano le figure che sono il risultato della moltiplicazione, e da tale somma si sottraggono tanti multipli di 9 quanti sarà possibile, e se rimarrà 1 come resto la moltiplicazione sarà certamente corretta. Ad esempio, se si sommano le figure che sono il risultato della moltiplicazione, e cioè 1, 3, 6, e 9, si ha 19, da cui sottraendo due volte nove, rimane 1 come resto, come abbiamo detto deve rimanere; o se del 19 si prende il 9 che è al primo posto, rimarrà ancora 1. Si noti che, quando si sommano le figure di 37, vale a dire il 3 e il 7, dalla divisione di 37 per 9 rimane 1, e lo stesso risultato si ha dal 10, che risulta dalla somma del 3 e 7, se da questo si toglie 9; del resto ciò che rimane da qualsiasi numero diviso per 9, si ottiene anche dalla somma di tutte le cifre dello stesso numero. E notiamo ancora, come dividendo ogni numero in parti, e moltiplicando queste parti per un altro numero, la moltiplicazione in totale è pari alla somma di tutti i prodotti delle singole parti. Pertanto, il prodotto di 36 per 37, aggiunto al prodotto 1 per 37, è pari al prodotto di 37 per 37. Ma dalla moltiplicazione del 36 per 37 risulta un numero che è un multiplo di nove, come 36 è multiplo di nove. Pertanto il numero derivante da 36 volte

il 37, se è diviso per 9, nulla rimarrà di indivisibile. Inoltre. la moltiplicazione di 1 per 37 è uguale alla somma della moltiplicazione 1 per 36 e di 1 per 1. Tuttavia, la moltiplicazione di 1 per 36 produce un numero che è divisibile per 9; la moltiplicazione di 1 per 1, cioè 1, è indivisibile per 9. Pertanto, dal prodotto di 37 per 37 diviso 9 resta 1, che si ha anche dalla somma di tutte le figure che formano il prodotto di 37 per 37, come abbiamo visto sopra; oppure, se dal detto prodotto si toglie 9, allora rimane 136, da cui cancelliamo 3 e 6, che danno una somma di 9; anche così rimanere 1; 1369 è indivisibile per 9.

Ancora, se si vuole moltiplicare 98 per 98, si scrive il 98 sotto il 98 come ho detto prima; 8 moltiplicato per 8 dà 64; si mette il 4 sopra gli 8, e il 6 si tiene in mano per le decine; si moltiplica l'8 per il 9; si ha 72; e ancora simmetricamente l'8 in basso si moltiplica per il 9 in alto; si ha 72 che viene aggiunto all'altro 72 ed al 6 tenuto in mano; si ha 150; e siccome non ci sono unità il 150, si mette uno zero sopra entrambi i 9, e il 15 si tiene in mano per le decine; si moltiplica il 9 per il 9; si ha 81 che si aggiunge al 15 tenuto in mano; si ha 96 e si scrive il 6 nel terzo posto e il 9 nel quarto, come in figura. Vediamo ora se questa moltiplicazione è corretta; si sommano le figure del 98 superiore, vale a dire il 9 e l'8, e si sottrae il 9; rimane 8. Si fa la stessa cosa con il 98 inferiore; rimane ancora 8; si moltiplica 8 per 8; si ha 64 da cui vengono sottratti tutti i nove che sono in 64; rimane 1 per resto; o in altro modo, si sommano le figure che sono nel suddetto 64, vale a dire il 6 e il 4; si ha 10 da cui viene sottratto 9; rimane ancora 1; successivamente vengono sommate le figure che sono il risultato della moltiplicazione, cioè 9, 6, 0, e 4; tuttavia non è necessario aggiungere la figura nove in tali controlli; con nove la sottrazione si fa sempre in anticipo, quindi si sommano 6, 0, e 4; si ha 10 da cui viene sottratto 9; rimarrà 1 per resto, come doveva rimanere. Inoltre, se vorrete moltiplicare per se stesso qualunque numero di due posti senza le unità al primo posto, come in 10 o 40 o 90, in cui il posto dello zero è sempre necessario, farete così: scrivete il numero come ho detto sopra; moltiplicate il secondo posto per il secondo, e mettete due zeri prima del prodotto, e quindi avrete il risultato di tale moltiplicazione. Se cercate la moltiplicazione di 70 per 70, scrivete i 70 nel modo di cui sopra, e moltiplicate la figura sette che è al secondo posto del numero superiore per il 7 in basso; si ha 49, di fronte al quale si mettono due zeri, cioè quelli che sono prima di ogni 7; 4900 è il risultato della moltiplicazione cercato. Se si cerca la moltiplicazione di 37 e 49, si scrive il 49 sotto il 37, cioè il numero più grande sotto il più piccolo, e gli stessi posti sotto gli stessi posti, come viene visualizzato nel margine; si moltiplica il 7 per il 9; si ha 63; si mette il 3 sopra il 7 e il 6 si tiene in mano per le decine; si moltiplica trasversalmente il 7 per il 4; si ha 28 che è aggiunto al 6 tenuto in mano; si ha 34. si moltiplica anche il 9 per il 3; si ha 27 che si aggiunge al 34; si ha 61; si mette 1 sopra il 3 e il 6 si tiene in mano per le decine; si moltiplica il 3 per 4; si ha 12 che si aggiunge al 6; si ha 18 che viene messo dopo il 13 nella posizione superiore; ciò produce 1813 per il risultato della moltiplicazione data, come qui illustrato.

la prova	9604
è 1	98
	98

4900
70
70

la prova	1813
è 4	37
	49

E così si saprà se la moltiplicazione è corretta: il 37 è diviso per 9; oppure, si sommano le figure di 37, cioè il 3 e il 7; si ha 10 da cui viene sottratto 9; rimane 1 che è conservato; analogamente, si sommano le figure di 49, cioè il 4 e il 9; si ha 13 da cui si sottrae 9; resta 4 che viene moltiplicato per il mantenuto 1; si ha 4 che viene mantenuto come resto; si sommano le figure che sono il risultato della moltiplicazione, cioè 1, 8, 1 e 3; si ha 13 da cui viene sottratto 9; si ha 4, come deve rimanere per il resto.

Procediamo ora nel modo detto sopra, separando i numeri in parti, e quindi moltiplicando tali numeri. La moltiplicazione di 37 per 49, è uguale alla somma delle moltiplicazioni di 7 per 49 e di 30 per 49. Ma la moltiplicazione di 7 per 49 è pari alla somma delle moltiplicazioni di 7 per 9 e di 7 per 40, e ancora la moltiplicazione di 30 per 49 è pari alle moltiplicazioni di 30 per 9, e di 30 per 40. Pertanto la moltiplicazione di 37 per 49 è pari alla somma di quattro moltiplicazioni che sono: 7 per 9, 7 per 40, 30 per 9, e 30 per 40. E le quattro moltiplicazioni di cui sopra si eseguono in ordine: si moltiplica prima il 7 per il 9, e si mettono le unità sopra al primo posto, perché quando il primo posto moltiplica qualsiasi posto esso dà lo stesso posto, o finisce in esso. Secondo, moltiplichiamo il 7 per 4; terzo, il 9 per 3, e prendiamo la somma di tali prodotti; mettiamo le unità nel secondo posto, perché quando il primo posto moltiplica il secondo si ottiene il secondo posto. Abbiamo moltiplicato 7 per 40, e 9 per 30; infine moltiplichiamo il 3 per 4, vale a dire il secondo posto per il secondo, e a questo prodotto aggiungiamo le decine tenute; mettiamo le unità al terzo posto, e le decine ottenute al quarto; e così abbiamo moltiplicato il 30 per 40, perché con la moltiplicazione di ogni secondo posto si ottiene il secondo posto. Allo stesso modo dalla moltiplicazione del terzo posto di un numero qualsiasi, si ottiene il terzo posto del risultato. E del quarto, il quarto, e del quinto, il quinto, e così via. Spiegherò quindi cosa vuol dire che moltiplicando il primo posto per qualsiasi altro, si ha lo stesso posto, oppure un numero che finisce in esso. Quando si moltiplica figura per figura, e la moltiplicazione non dà l'ultimo numero, allora la moltiplicazione produce lo stesso posto; e dalla moltiplicazione risulta un numero di due cifre, come 20 o 30, o composto dalla seconda e prima come 15 e 28; allora mettiamo la fine del numero nello stesso posto che il primo posto moltiplica; e per questo motivo, quando moltiplichiamo il primo posto per qualsiasi altro posto, mettiamo le unità di quella moltiplicazione nello stesso posto, e le decine le teniamo per il posto seguente, lo stesso vale per la moltiplicazione dei posti rimanenti.

Sulla moltiplicazione di una figura con molte.

Anche se si cerca la moltiplicazione di una figura con due, o con molte, si scrive la figura sopra il primo posto nel numero che si vuole moltiplicare, e si moltiplica la figura sola per il primo posto del numero, le unità vengono poste su di esso, e le decine sono tenute in mano; e la figura sola si moltiplica per la seconda del numero più basso, e viene aggiunta alle decine mantenute, mettendo sempre le unità, e tenendo le decine; e la stessa figura

viene moltiplicata ordinatamente per il terzo e il quarto, e per le altre figure. Per esempio, se è richiesta la moltiplicazione di 8 per 49, si mette l'8 sopra il 9, e si moltiplica l'8 per il 9; si ha 72; il 2 viene messo sopra l'8 e il 7 è tenuto in mano; si moltiplica l'8 per 4; si ha 32, e si aggiunge il 7 mantenuto prima; si ha 39, e si mettono il 9 e il 3; 392 è il risultato di detta moltiplicazione, come è mostrato a margine. Ancora, se è richiesta la moltiplicazione di 7 per 308, si scrive il 7 sopra l'8 e si moltiplica il 7 per l'8; si ha 56; si mette il 6, e si mantiene il 5; il 7 si moltiplica per lo 0, che dà 0, che si aggiunge al 5 mantenuto dando 5, che si mette dopo il 6; si moltiplica il 7 per 3 che dà 21, che si mette dopo 56; e 2156 è il risultato di detta moltiplicazione, e così una figura è moltiplicata per molte.

392
8
49

2156
7
308

Sulla stessa.

Ancora, se si vuole moltiplicare 70 per 81, lo 0 viene eliminato dal 7; il 7 rimasto si moltiplica per 81; si ha 567 che viene messo prima dello 0 che abbiamo tolto dal 70; si ha 5670.

5670
70
81

Inizia la seconda parte del secondo capitolo.

Tuttavia, volendo moltiplicare tre figure per tre figure, insegneremo una facile regola universale per questo. Vale a dire, il posto di un numero è scritto ancora sotto il posto di un altro, cioè le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia; il primo numero in alto si moltiplica per il primo in basso, le unità sono messe sopra il primi posti dei numeri e le decine sono tenute in mano; si moltiplica il primo in alto per il secondo in basso, e il primo in basso per il secondo nella parte superiore, i prodotti e le unità tenute vengono sommate, le unità sono scritte e le decine tenute; si moltiplica il primo in alto per il terzo in basso, il primo in basso per il terzo in alto, e il secondo per il secondo, ed i tre prodotti e il numero mantenuto vengono sommati; le unità sono messe sopra la terza posizione, ed eventuali decine sono mantenute in mano; si moltiplica il secondo nel numero superiore per il terzo nell'inferiore, e il secondo in basso per il terzo in alto; dei prodotti sommati le unità sono scritte e le decine tenute; si moltiplica il terzo per il terzo, e si aggiunge il risultato alle decine tenute; le unità sono scritte, e le eventuali decine sono messe di seguito; e quindi si avrà la moltiplicazione di qualsiasi numero di tre cifre, siano esse uguali o disuguali.

Appartengono a questa categoria di numeri uguali 345 e 345, che vogliamo moltiplicare insieme, mettendoli uno accanto all'altro come visualizzato in questa pagina; si moltiplica il 5 per il 5; si ha 25; il 5 è messo sopra entrambi i 5, come visualizzato nella seconda illustrazione, e il 2 è tenuto in mano per le decine; il 5 nel numero superiore viene moltiplicato per il 4 in basso, e il 5 in basso per il 4 sopra; i prodotti vengono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 42; 2 viene messo sopra entrambi i 4, come nella terza illustrazione, e 4 viene mantenuto per le decine; il 5 in alto è moltiplicato per il 3 in basso, e il 5 in basso per il 3 in alto, e il 4 per il 4, e i risultati delle

prima	345
	345
	5
seconda	345
	345
	25
terza	345
	345

	025
quarta	345
	345

	9025
quinta	345
	345

	119025
ultima	345
	345

tre moltiplicazioni sono sommati con il 4 tenuto in mano; si ha 50; lo 0 è messo sopra entrambi i 3, come è mostrato nella quarta illustrazione, e il 5 è tenuto in mano; si moltiplica il 4 in alto con il 3 in basso, e il 4 in basso con il 3 in alto, e si sommano con il 4; si ha 29; 9 è messo dopo lo 0, come nella quinta illustrazione, e il 2 è tenuto in mano; 3 viene moltiplicato per 3; si ha 9, che si aggiunge al 2; si ha 11 che è scritto, come nella sesta e ultima illustrazione. E con i metodi sopra detti si verificherà se la moltiplicazione è corretta; cioè, le figure del 345 di cui sopra vengono sommate, e quindi viene sottratto 9; rimane 3; si fa allo stesso modo con il 345 di sotto e rimane ancora 3; si moltiplica il 3 per il 3 e si toglie 9; rimane 0 come resto; poi si sommano le figure del risultato della moltiplicazione, ossia 1, 1,2, e 5; si ha 9, da cui viene sottratto 9; rimane 0 come dovrebbe rimanere. Perciò dichiarerò, infatti, che la moltiplicazione della seconda figura per la seconda va aggiunta alla moltiplicazione delle prime figure per le terze, perché, come si è detto, il primo posto moltiplica qualsiasi posto rendendo lo stesso posto, e il secondo posto moltiplica qualsiasi posto dando il posto dopo quello per cui viene moltiplicato. E perciò, quando si moltiplica il primo posto per il terzo, si ottiene il terzo posto. E quando si moltiplica il secondo per il secondo, si ottiene lo stesso di prima, cioè il terzo. Pertanto alla moltiplicazione del secondo posto per il secondo posto devono essere aggiunti i prodotti dei primi per i terzi. Si prosegue col prodotto dei secondi posti per i terzi, da cui risulta il quarto posto, cioè quello dopo coloro per cui si moltiplica. Per ultimo si moltiplica il terzo posto per il terzo, da cui risulta il quinto posto, vale a dire il terzo da quello che il terzo moltiplica. E per questa ragione, da ciò che si ottiene dalla moltiplicazione dei primi posti per i terzi e dei secondi per i secondi, mettiamo le unità al terzo posto, e continuiamo con le decine al quarto posto. E da ciò che viene dalla moltiplicazione del secondi per i terzi e dalle decine custodite, mettiamo le unità nel quarto posto, e teniamo le decine per il quinto posto; le decine vengono aggiunte al prodotto del terzo posto per il terzo, e si mettono le unità al quinto posto, e le decine nel sesto, e quindi si ha la moltiplicazione di sopra.

Sulla stessa.

368449
607
607

Se si vuole moltiplicare 607 per 607, collocati i numeri, si moltiplica il 7 per il 7; si ha 49; si mette il 9 e si mantiene il 4; si moltiplica il 7 per lo 0 e, in croce, lo 0 per il 7; si aggiunge il 4 tenuto e si ha 4, che si mette; si moltiplica il 7 per il 6, il 7 per il 6, e lo 0 per 0; si ha 84; si mette il 4 e si mantiene l'8; lo 0 viene moltiplicato per il 6, lo 0 per il 6, e lo zero è aggiunta all'8; si ha 8 che si mette; il 6 è moltiplicato per il 6; si ha 36; si mette il 6 e il 3, e quindi si avrà 368449 per il risultato di detta moltiplicazione.

608400
78
78

Sulla stessa.

Se si vuole moltiplicare 780 per 780, si sopprimono entrambi gli zeri; ci

resta 78 e 78; il 78 è moltiplicato per il 78; si ha 6084, prima di mettere i due zeri, e si ha 608400 per il risultato di detta moltiplicazione. Anche se si vuole moltiplicare 900 da 900, si eliminano gli zeri da ogni numero, e si moltiplica il 9 per il 9; si ha 81, prima di mettere i quattro zeri cancellati, e 810000 sarà il risultato di detta moltiplicazione.

810000
9
9

Sulle stesse con numeri disuguali.

Tuttavia, volendo moltiplicare due numeri disuguali, questi saranno moltiplicati nello stesso modo e ordine; se si hanno 123 e 456 da moltiplicare, allora si scrive un numero dopo l'altro, come si è detto; il 3 è moltiplicato per il 6; si ha 18; l'8 è scritto e l'1 viene mantenuto; il 3 è moltiplicato per il 5; si ha 15 che aggiunto all'1 mantenuto dà 16; il 6 volte 2 viene aggiunto al 16; si ha 28; l'8 è scritto e il 2 è mantenuto; il 3 è moltiplicato per il 4, il 6 per l'1, e il 2 per il 5, e la somma viene aggiunta al 2 mantenuto; si ha 30; lo 0 è scritto e il 3 viene mantenuto; il 2 viene moltiplicato per il 4, il 5 per l'1, e la somma è aggiunta al 3 mantenuto; si ha 16; il 6 è scritto e l'1 che viene mantenuto si aggiunge al prodotto di 1 per 4; si ha 5 che viene scritto e 56088 sarà il risultato di detta moltiplicazione. Se si vuole controllare questo risultato, si aggiungono le figure di 123; si ha 6; si aggiungono le figure di 456; si ha 15 da cui si sottrae il numero 9; rimane 6, che viene moltiplicato per 6; si ha 36 che diviso per 9 dà 0 per resto. Poi si sommano le figure che sono il risultato di detta moltiplicazione; si ha 27 che diviso per 9 dà 0 per resto, come ci si aspetta. Ancora, se si propone di moltiplicare 370 per 451, allora si può moltiplicare usando la sopra detta istruzione; tuttavia, poiché lo zero è nel primo posto di uno dei numeri, cioè del 370, la moltiplicazione viene insegnata in altro modo, cioè, lo 0 è eliminato dal 370; si ha 37 che viene moltiplicato per il 451; quindi si ha la moltiplicazione di due figure per tre, che deve ancora essere insegnata. Si scrive il 37 sopra il 51 del 451, e il 7 è moltiplicato per l'1; si ha 7 che è scritto. Il 7 è moltiplicato per il 5 e l'1 è moltiplicato per il 3; si ha 38; l'8 viene scritto e il 3 viene mantenuto; il 7 è moltiplicato per il 4 e il 3 per il 5, e la somma viene aggiunta al 3 mantenuto; si ha 46; il 6 è scritto e il 4 è mantenuto; il 3 è moltiplicato per 4, e il prodotto viene aggiunto al 4 mantenuto; si ha 16; il 6 e l'1 sono scritti e avremo 16687 per il risultato di detta moltiplicazione di due figure per tre, che messo davanti allo 0 cancellato dal 370 ci dà 166870; quindi, in questo modo vengono moltiplicate due figure qualsiasi con qualsiasi tre figure. Ancora, se è richiesta la moltiplicazione di 320 per 570, eliminando lo zero da ogni numero, rimangono 32 e 57; questi numeri sono moltiplicati insieme; si ha 1824 che viene messo davanti ai due zeri, e 182400 sarà il risultato di detta moltiplicazione.

	56088
la prova	123
è 0	456

166870
37
451

182400
32
57

Terza parte sulla moltiplicazione di quattro figure.

Volendo moltiplicare quattro figure per quattro, si scrivono i numeri, e posti simili si trovano sotto posti simili; il primo posto viene moltiplicato per il

primo e si mettono le +unità, ricordando sempre di mantenere le decine; il primo è moltiplicato per il secondo, e il primo per il secondo, e vengono scritti; il primo per il terzo, il primo per il terzo, e il secondo per il secondo, e vengono scritti; il primo per il quarto, il primo per il quarto, il secondo per il terzo e il secondo per il terzo, e sono scritti; il secondo per il quarto, il secondo per il quarto, e il terzo per il terzo, e sono scritti; il terzo per il quarto e il terzo per il quarto, e sono scritti; il quarto per il quarto, ed è scritto; e quindi si avrà la moltiplicazione di numeri di quattro figure, siano essi uguali o disuguali. In questa categoria, propongo la moltiplicazione di 1234 per se stesso, e scrivo il numero; il primo posto è moltiplicato per il primo, cioè il 4 per il 4; si ha 16; il 6 viene messo su entrambi i 4, e l'1 viene mantenuto; il 4 viene moltiplicato per il 3 ed il 4 per il 3, e sono aggiunti all'1 mantenuto; si ha 25; il 5 viene messo sopra entrambi i 3, e il 2 viene mantenuto. Il 4 è moltiplicato per il 2, il 4 per il 2 e il 3 per il 3, e i prodotti sono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 27; il 7 è messo sopra entrambi i 2, e il 2 viene mantenuto; il 4 viene moltiplicato per 1, il 4 per 1, il 3 per 2 e il 3 per 2, e questi quattro prodotti vengono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 22; il 2 è messo sopra entrambi gli 1, e il 2 è tenuto in mano; il 3 è moltiplicato per l'1, il 3 per l'1, e il 2 per il 2, ed i prodotti sono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 12; il 2 è scritto, e l'1 è tenuto in mano; il 2 viene moltiplicato per l'1, e il 2 per l'1, ed i prodotti sono aggiunti all'1 mantenuto; si ha 5 che è scritto; l'1 è moltiplicato per l'1; si ha 1, che è scritto; e quindi 1522756 sarà il risultato della moltiplicazione.

1522756
1234
1234

Sulla stessa.

Ancora, per capire, si propone la moltiplicazione di 2345 per 6789; quindi si scrivono i numeri; il 5 viene moltiplicato per il 9; si ha 45; il 5 è scritto, e il 4 è mantenuto; il 5 è moltiplicato per l'8, il 9 per il 4, ed i prodotti sono aggiunti al 4 mantenuto; si ha 80; lo 0 è scritto e l'8 è mantenuto; il 5 è moltiplicato per il 7, il 9 per il 3 e il 4 per l'8, e i prodotti vengono aggiunti all'8 mantenuto; si ha 102; il 2 è scritto, e il 10 è tenuto in mano; il 5 è moltiplicato per il 6, il 9 per il 2, il 4 per il 7 e l'8 per il 3, ed i prodotti sono aggiunti al 10 mantenuto; si ha 110; lo 0 è scritto, e l'11 viene mantenuto; il 4 è moltiplicato per il 6, l'8 per il 2 e il 3 per il 7, e i prodotti vengono aggiunti all'11 mantenuto; si ha 72; il 2 è scritto e il 7 è mantenuto; il 3 è moltiplicato per il 6, il 7 per il 2, e i prodotti sono aggiunti al 7 mantenuto; si ha 39; il 9 è scritto, e il 3 viene mantenuto per essere aggiunto al prodotto del 2 per il 6; si ha 15, e il 5 e l'1 sono scritti, ottenendo la moltiplicazione di detti numeri, come mostrato.

	15920205
la prova	2345
è 6	6789

Il controllo.

Controlliamo se la moltiplicazione è corretta: il resto di 2345, che è 5, viene moltiplicato per il resto di 6789, che è 3; si ha 15 da cui viene sottratto 9; rimane 6, che è anche il resto del risultato della moltiplicazione. Così si moltiplicano tutti i numeri di quattro cifre; ci sono comunque tra questi,

alcuni che possono essere moltiplicati in un modo più semplice, vale a dire quelli che hanno zeri in testa; se si chiede la moltiplicazione di 5000 e 7000, il 5 viene moltiplicato per il 7; si 35, prima di mettere gli zeri che sono nei numeri, che sono sei, e quindi si ha 35000000 per il risultato di detta moltiplicazione.

Ancora, se si cerca la moltiplicazione di 5100 per 7430, il 51 si moltiplica per il 743; si ha 37893, davanti al quale vengono messi i tre zeri, che sono alla testa di entrambi i numeri, e quindi si avrà 37893000 per il risultato di detta moltiplicazione.

37893000
51
743

Ancora, se si cerca la moltiplicazione di 2500 e 3701, si cancellano i due zeri che sono a capo di 2500; ci resterà 25 che si moltiplica con 3701, vale a dire due figure con quattro; si scrive il 25 sopra il 3701, come è mostrato sotto, e si moltiplica il 5 per l'1; si ha 5 che si scrive; si moltiplica il 5 per lo 0 e l'1 per il 2; si ha 2 che si scrive; il 5 per il 7 e il 2 per lo 0; si ha 35; si scrive il 5 e si mantiene il 3; si moltiplica 5 per 3 e 2 per 7 e si aggiungono i prodotti al 3 mantenuto; si ha 32; il 2 è scritto, il 3 è mantenuto; il 2 per il 3; si ha 6, che si aggiunge al 3 mantenuto; si ha 9 che si scrive. E così si ha 92525 per la moltiplicazione di 25 per 3701, come viene mostrato in figura, davanti al quale si mettono due zeri, e si avrà il risultato della moltiplicazione cercata.

9252500
25
3701

Quarta parte del secondo capitolo.

Se si vuole moltiplicare un numero di cinque posti per qualsiasi numero dello stesso numero di posti, vale a dire cinque figure per cinque, si moltiplicano prima i numeri situati al primo posto, e si scrive; il primo per il secondo e il primo per il secondo, e si scrive; il primo per il terzo, il primo per il terzo, e il secondo per il secondo, e si scrive; il primo per il quarto, il primo per il quarto, il secondo per il terzo e il secondo per il terzo, e si scrive; il primo per il quinto, il primo per il quinto, il secondo per il quarto, il secondo per il quarto e il terzo per il terzo, e si scrive; il secondo per il quinto, il secondo per il quinto, il terzo per il quarto, il terzo per il quarto, e si scrive; il terzo per il quinto, il terzo per il quinto, il quarto per il quarto, e si scrive; il quarto per il quinto, il quarto per il quinto, e si scrive; il quinto per il quinto, e si scrive. E così si moltiplica qualsiasi numero di cinque posti; per mostrare questo evidentemente, proponiamo una moltiplicazione, che vale per moltiplicazioni uguali o disuguali dello stesso numero di posti: se desideriamo moltiplicare 12345 per 12345, scriviamo i numeri, come abbiamo insegnato in precedenza; si moltiplica il 5 per il 5; si ha 25; si scrive il 5 e si mantiene il 2; il 5 per il 4, il 5 per il 4, e si aggiungono i prodotti al 2 mantenuto; si ha 42; si scrive il 2 e si mantiene il 4; il 5 per il 3, il 5 per il 3 e il 4 per il 4, e si aggiungono i prodotti al 4 mantenuto; si ha 50; si scrive lo 0 e si mantiene il 5; il 5 per il 2, il 5 per il 2, il 4 per il 3 e il 4 per il 3, e si aggiungono i prodotti al 5 mantenuto; si ha 49; si scrive il 9 e si mantiene il 4; il 5 per l'1, il 5 per l'1, il 4 per il 2, il 4 per il 2 e il 3 per il 3, e si aggiungono i prodotti al 4 mantenuto; si ha 39; si scrive il 9 e si mantiene il 3; il 4 per l'1, il 4 per l'1, il 3 per il 2 e il 3 per il 2, e si aggiungono al 3

152399025
12345
12345

mantenuto; si ha 23; si scrive il 3 e si mantiene il 2; il 3 per l'1, e il 3 per l'1, il 2 e per il 2, e si aggiungono al 2 mantenuto; si ha 12; si scrive il 2 e si mantiene l'1; il 2 per l'1 e il 3 per l'1, e si aggiungono i prodotti all'1 mantenuto; si ha 5, che si scrive; l'1 per l'l dà 1, che viene scritto; e quindi si avrà il risultato di detta moltiplicazione. Vi mostrerò ora il modo di procedere per moltiplicare numeri che sono proporzionali tra loro. Infatti, se tre numeri sono proporzionali, cioè se il primo sta al secondo come il secondo al terzo, allora il prodotto del primo per il terzo sarà uguale al prodotto del secondo per se stesso. E se quattro numeri sono proporzionali, cioè se il primo sta al secondo come il terzo al quarto, allora il prodotto del primo per il quarto sarà uguale a il prodotto del secondo per il terzo, come si trova in Euclide. Un numero puo salire, attraverso posti così connessi, senza fine; per cui, il primo posto starà al secondo, come il secondo al terzo, il terzo al quarto, e così ogni antecedente al suo seguente. Pertanto, il prodotto del secondo posto per sé renderà lo stesso posto del prodotto del primo per il terzo. E la moltiplicazione del secondo per il terzo renderà il posto della moltiplicazione del primo per il quarto. Infatti, la moltiplicazione viene iniziata con le figure del primo posto, dalla cui moltiplicazione risultano o numeri del primo posto, o che terminano in esso. Perciò, dalla moltiplicazione della prima figura per la prima, le unità sono messe nel primo posto, e le decine sono conservate per il secondo, a cui si aggiungono le moltiplicazioni dei primi per i secondi, e risulta un numero del secondo posto, o che termina in esso. Pertanto, le unità sono messe sopra il secondo posto, e per ciascun dieci che si ha, viene mantenuto 1 per il terzo posto. Quindi, moltiplichiamo il primo per il terzo, e il prodotto viene aggiunto alla moltiplicazione del secondo per il secondo, perché la moltiplicazione del secondo posto per il secondo rende lo stesso posto dato dalla moltiplicazione dei primi posti per i terzi. Perciò, dalle moltiplicazioni dei primi posti per i terzi e i secondi per i secondi, le unità sono messe sopra il terzo posto; dopo ciò, il primo viene moltiplicato per il quarto, e i secondi dai terzi, come sono nei quattro posti proporzionali, perché il primo sta al secondo come il terzo sta al quarto, e dalle stesse moltiplicazioni risulta un numero terminante al quarto posto. Perciò, le unità sono messe al quarto posto, e poi si moltiplicano i primi per i quinti, i secondi per i quarti, e i terzi per i terzi, perché, come il primo posto sta al secondo, così il quarto sta al quinto. Poiché la moltiplicazione del secondo posto per il quarto rende il posto dato dalla moltiplicazione del primo per il quinto, vale a dire il quinto posto; e poiché il secondo posto sta al terzo come il terzo al quarto, per cui la moltiplicazione del terzo posto per il terzo rende il posto della moltiplicazione del secondo per i quarto, cioè il quinto posto; per questo motivo le unità sono messe sopra il quinto posto, e, quindi, seguendo la proporzionalità, si ottiene il risultato della moltiplicazione di numeri qualsiasi. Questo può essere chiaramente compreso da ciò che segue. Si osservi, per questo motivo, come il primo posto sta al secondo, così il penultimo sta all'ultimo; e come il primo sta al terzo, così il terzultimo all'ultimo; e come il primo sta al quarto, così il quartultimo all'ultimo, e così via. Nel seguito moltiplichiamo cinque figure per cinque; dopo aver messo

le cinque figure sopra le cinque, si moltiplicano la seconda per la quinta e la terza per la quarta, e le moltiplicazioni vanno al sesto posto; poiché, come il secondo posto moltiplicato per il quinto dà il sesto posto, così si ha dalla moltiplicazione del terzo posto per il quarto, e come il secondo posto sta al terzo, così il quarto sta al quinto. Ancora, il terzo posto è moltiplicato per il quinto, e il quarto per il quarto, e il risultato va al settimo posto; dopo, il quarto è moltiplicato per il quinto, e si ha l'ottavo posto. Per ultimo, il quinto posto è moltiplicato per il quinto, ottenendo il nono posto; e quindi si avrà il risultato di detta moltiplicazione. Dopo tutto ciò che si è detto sulla moltiplicazione, chiunque sarebbe in grado di applicare le istruzioni sopraddette, tuttavia mostrerò, per completare l'insegnamento, la moltiplicazione di otto posti.

Quinta parte del secondo capitolo.

Se qualcuno vuole moltiplicare un numero qualsiasi di otto figure per qualsiasi altro dello stesso numero di posti, moltiplica il primo per il primo, e scrive il risultato; il primo per il secondo, e il primo per il secondo, e scrive la somma; il primo per il terzo, il primo per il terzo, e il secondo per il secondo, e scrive la somma; il primo per il quarto, il primo per il quarto, il secondo per il terzo e il secondo per il terzo, e scrive la somma; il primo per il quinto, il primo per il quinto, il secondo per il quarto, il secondo per il quarto e il terzo per il il terzo, e scrive la somma; il primo per il sesto, il primo per il sesto, il secondo per il quinto, il secondo per il quinto, il terzo per il quarto, e il terzo per il quarto, e scrive la somma; il primo per il settimo, il primo per il settimo, il secondo per il sesto, il secondo per il sesto, il terzo per il quinto, il terzo per il quinto, e il quarto per il quarto, e scrive la somma; il primo per l'ottavo, il primo per l'ottavo, il secondo per il settimo, il secondo per il settimo, cioè quelli che sono con il primo e l'ottavo, il terzo per il sesto e il terzo per il sesto, cioè quelli con il secondo e il settimo, il quarto con il quinto e il quarto con il quinto, che sono con il terzo e il sesto, e scrive la somma. E quindi, in tutte le moltiplicazioni, le figure che emergono dalle parti interne sono moltiplicate alternativamente da entrambe le parti; moltiplicate così una con l'altra esse vengono sommate, le unità sono scritte e decine tenute in mano. Quindi, le moltiplicazioni delle prime figure, in ordine crescente nel resto dei posti, vengono espletate fino all'ultima; poi le prime figure di entrambi i numeri sono lasciate indietro, e si moltiplica la seconda per l'ultima, cioè, in questo problema si moltiplica il secondo posto per l'ottavo, il secondo per l'ottavo, il terzo per il settimo, e il terzo per il settimo, che sono aggiunti con il secondo e l'ottavo; il quarto per il sesto e il quarto per il sesto, che vengono aggiunti con il terzo e il settimo; il quinto per il quinto, racchiusi fra il quarto e il sesto, e si scrive la somma; poi si lasciano i secondi posti; si moltiplica il terzo per l'ottavo, il terzo per l'ottavo, il quarto per il settimo, il quarto per il settimo, il quinto per il sesto e il quinto per il sesto, e si scrive la somma; si lasciano i terzi posti; si moltiplica il quarto per l'ottavo, il quarto per l'ottavo, il quinto per il settimo, il quinto per il settimo e il sesto per il sesto, e si scrive la somma; si lasciano

i quarti posti; si moltiplica il quinto per l'ottavo, il quinto per l'ottavo, il sesto per il settimo e il sesto per il settimo, e si scrive la somma; si lasciano i quinti posti; si moltiplica il sesto per l'ottavo, il sesto per l'ottavo e il settimo per il settimo, e si scrive somma; il settimo per l'ottavo, il settimo per l'ottavo, e si scrive la somma; l'ottavo per l'ottavo, e si scrive il risultato; e così si avrà la moltiplicazione di tutti i numeri di otto figure; essa sarà chiaramente compresa in numeri; siano i numeri 12345678 e 87654321, che moltiplicheremo uno per l'altro come descritto in seguito; si moltiplica l' 8 per l'1; si ha 8, che si scrive; l'8 per il 2, e l'1 per il 7; si ha 23; si mette il 3 e si mantiene il 2; l'8 per il 3, l'1 per il 6 e il 7 per il 2, e si sommano i prodotti con il 2 mantenuto; si ha 46; si scrive il 6 e si tiene il 4; l'8 per il 4, l'1 per il 5 e il 7 per il 3, e il 2 per il 6, che aggiunti al 4 mantenuto danno 74; si scrive il 4 e si tiene il 7; l'8 per il 5, l'1 per il 4, il 7 per il 4, il 2 per il 5 e il 6 per il , aggiunti al 7 mantenuto, danno 107; il 7 si scrive e si tiene il 10; l'8 per il 6, l'1 per il 3, il 7 per il 5, il 2 per il 4, il 6 per il 4, e il 3 per il 5, con l'aggiunta del 10 mantenuto, danno 143; si scrive il 3 e il 14 si mantiene; l'8 per il 7, l'1 per il 2, il 7 per il 6, il 2 per il 3, il 6 per il 5, il 3 per il 4, il 5 per il 4, aggiunti al 14 mantenuto, danno 182; il 2 si scrive e il 18 si mantiene; l'8 per l'8, l'1 per l'1, il 7 per il 7, il 2 per il 2, il 6 per il 6, il 3 per il 3, il 5 per il 5 e il 4 per il 4, con l'aggiunta del tenuto 18 danno 222; il 2 è messo, e il 22 è mantenuto; il 7 per l'8, il 2 per l'1, il 6 per il 7, il 3 per il 2, il 5 per il 6, il 4 per il 3 e il 4 per il 5, aggiunti al 22 mantenuto, danno 190; lo 0 è messo e il 19 è mantenuto; il 6 per l'8, il 3 per l'1, il 5 per il 7, il 4 per il 2, il 4 per il 6 e il 5 per il 3, aggiunti al 19 mantenuto, danno 152; il 2 è messo, e il 15 viene mantenuto; il 5 per l'8, il 4 per l'1, il 4 per il 7, il 5 per il 2 e il 3 per il 6, aggiunti al 15 mantenuto, danno 115; il 5 è messo, e l'11 è mantenuto; il 4 per l'8, il 5 per l'1, il 3 per il 7 e il 6 per il 2, aggiunti al'11 mantenuto, danno 81; l'1 è messo, e l'8 è mantenuto; il 3 per l'8, il 6 per l'1 e il 2 per il 7, aggiunti all'8 mantenuto, danno 52; il 2 è messo, e il 5 è mantenuto; il 2 per l'8 e il 7 per l'1, aggiunti al 5 mantenuto, danno 28; 8 è messo, e il 2 è mantenuto; l'1 per l'8 aggiunto al 2 mantenuto dà 10, che è scritto; si avrà quindi il risultato di detta moltiplicazione.

1082152022374638
12345678
87654321

In verità, se ci sono zeri ai capi dei numeri, questi vengono cancellati, le figure rimanenti sono moltiplicate fra loro, e gli zeri eliminati sono messi prima del prodotto senza zeri, quindi si avrà il risultato della moltiplicazione, come abbiamo indicato nelle moltiplicazioni a due, tre e quattro posti; e se non riusciamo a moltiplicare poche figure con molte, con le istruzioni date sopra, allora scriveremo il numero con molte figure sotto il numero con poche figure, collocando sul primo posto del numero inferiore il primo dell'altro, e uno dopo l'altro ogni altro posto; e metteremo dopo il numero con poche figure tanti zeri quante sono le figure in eccesso del numero maggiore, e quindi avremo numeri di uguale lunghezza da moltiplicare; così, se si vuole moltiplicare tre figure con sei, si mette il numero di sei figure al di sotto del numero di tre figure, e si mettono tre zeri dopo le tre figure, ottenendo una moltiplicazione di sei figure con sei, che eseguiremo secondo le suddette istruzioni. Ad esempio, volendo moltiplicare 345 per 698541, li scriveremo in quest'ordine, con tre zeri dopo

240996645
000345
698541

345. Il posizionamento degli zeri dopo le tre figure è frutto di mera necessità, senza un particolare significato.

Sesta parte del secondo capitolo.

Con l'uso frequente del tavolo, si saprà come operare con le istruzioni per moltiplicare scritte sopra; vediamo ora come applicare le stesse istruzioni a memoria e a mano, senza la tabella scritta, per i numeri di due e tre posti; si manterrà in memoria la scrittura dei numeri che si vogliono moltiplicare, e si inizierà a moltiplicare secondo l'ordine prescritto, mettendo in prima posizione nella mano sinistra il posto delle unità, e nella seconda posizione, nella stessa mano, il posto delle decine. Il terzo posto, quello delle centinaia, si mette nella mano destra, sforzandosi di imparare a mettere al quarto posto le migliaia. Il quinto posto non si può tenere in mano e si mantiene in memoria; e quindi si avrà la moltiplicazione di tutti i numeri di due o tre posti. Ad esempio, se si vuole moltiplicare 12 per 12, la loro scrittura viene tenuta in memoria; il 2 viene moltiplicato per il 2 e fa 4, che si mette nella mano sinistra al posto delle unità; si moltiplica il 2 del 12 superiore per l'1 di quello inferiore, e il 2 inferiore per l'1 superiore, e si sommano; si ha 4, che si mette nella stessa mano sinistra nel posto delle decine, indicando quaranta; si moltiplica l'1 per l'1, vale a dire la seconda figura per la seconda, e si ha 1, che si mette nella mano destra al posto delle centinaia. E si avrà 144 per detta moltiplicazione, come appare in questa pagina. Ancora, se si vuole moltiplicare 48 per 48 senza scrivere, si moltiplica l'8 per l'8; si ha 64; si mette il 4 nella mano sinistra al del posto delle unità, e si mantiene il 6 nella mano destra al posto della centinaia. Si moltiplica l'8 per il 4, l'8 per il 4 e si sommano i prodotti; si ha 64 che si aggiunge al 6 mantenuto nella mano destra; si ha 70; si mette lo 0 nella mano sinistra al posto delle decine, e il 7 si tiene nella mano destra, a cui si aggiunge la moltiplicazione del 4 per il 4, vale a dire 16; si ha 23; si mette il 3 nella mano destra al posto delle centinaia, e si mette il 2 nella stessa mano al posto delle migliaia, indicando duemila. E quindi 2304 sarà il risultato cercato. Ancora, se si vuole moltiplicare 23 pe 57, allora si mantiene la scrittura in memoria, e si moltiplica il 3 per il 7; si ha 21; si mette l'1 al posto delle unità nella mano sinistra, e si mantiene il 2 nella mano destra; il 3 per il 5 e il 7 per il 2, e si aggiungono i prodotti al 2 mantenuto; si ha 31; si mette l'1 nel posto delle decine, e si mantiene il 3 nella mano destra; il 2 per il 5, e si aggiunge il prodotto al 3 mantenuto; si ha 13; si mette il 3 al posto delle centinaia nella mano destra, e l'1 al posto delle migliaia, e quindi si avrà 1311 per questa moltiplicazione.

144
12
12

48
48

1311
23
57

Parte VII del secondo capitolo.

Se si vuole moltiplicare 347 per 347 senza scrivere, si moltiplica il 7 per il 7, tenendo la scrittura dei numeri in memoria; si ha 49; si mette il 9 nella mano sinistra al posto delle unità, e nel destra si mantiene il 4; due volte il 7 per il 4, e si aggiungono i prodotti al 4 mantenuto; si ha 60; si mette lo 0 al posto

delle decine nella mano sinistra, e si mantiene il 6 nella destra; due volte il 7 per il 3, e il 4 per il 4, che aggiunti al 6 tenuto danno 64; si mette il 4 nella destra al posto delle centinaia, e il 6 si tiene al posto delle migliaia, o nella memoria; due volte il 4 per il 3, e si aggiungono al 6 tenuto; si ha 30; si mette lo 0 e si mantiene 3 nella memoria; il 3 per il 3, e si aggiunge il prodotto al 3 conservato in memoria; si ha 12, che si tiene, non potendosi mettere in mano; e quindi si avrà 120409 per questa moltiplicazione. E così, se si sanno mantenere i numeri in memoria, in questo modo si sarà capaci di produrre risultati più facilmente che con il tavolo. E si sarà in grado di trovare le moltiplicazioni di qualsiasi numero di due posti e tre posti, con la memoria e le mani.

Capitolo 3

Inizia il terzo capitolo sull'addizione di numeri interi.

Volendo poi addizionare dei numeri, non importa quanti, si scrivono questi in una tabella come abbiamo fatto con la moltiplicazione, cioè mettendo il primo posto di ogni numero da aggiungere sotto il primo posto del numero che lo precede, il secondo sotto il secondo, e di seguito uno dopo l'altro. Poi si cominciano ad aggiungere nelle mani le figure dei primi posti di tutti i numeri da sommare, dal più basso fino a più alto; si mettono quindi le unità sopra il primo posto in alto e si tengono le decine in mano; a queste si aggiungono le decine scritte nei secondi posti, e si mettono le unità sopra il secondo posto, ed ancora si tengono in mano le decine. A queste si aggiunge la somma dei terzi posti, si mettono sopra le unità, mantenendo le decine, e così, addizionando i numeri passo dopo passo, si può avere la somma di tutti i numeri, senza fine. Per capire meglio, sono mostrate le addizioni di due numeri, di tre, e anche di più.

Vi è poi un altro modo di moltiplicazione molto apprezzato, migliore per moltiplicare grandi numeri, che io vi mostrerò nella moltiplicazione di 567 per 4321. Si costruisca un rettangolo a forma di scacchiera, con 5 punti di lunghezza, cioè uno in più del numero di figure del numero maggiore, e con 3 punti in larghezza, quante sono le figure del numero minore, e si metta il numero maggiore sopra il rettangolo sopraddetto, ed il minore di fianco, così come mostrato. La prima figura del numero più piccolo, vale a dire 7, viene moltiplicata per 1, che è la prima del numero maggiore; si ha 7 che viene messo nel primo posto della linea superiore, cioè sotto l'1; il 7 è moltiplicato per la seconda cifra del numero maggiore, vale a dire 2; si ha 14; il 4 è messo nel secondo posto della linea superiore, e l'1 viene mantenuto e aggiunto alla moltiplicazione del 7 per il 3; si ha 22; il 2 viene messo nel terzo posto, dopo il 4, e il 2 è mantenuto; ad esso si aggiunge la moltiplicazione del 7 per il 4, che è l'ultima figura del numero maggiore; si ha 30; lo 0 si mette nel quarto posto, e il 3 nel quinto. Allo stesso modo il 6 sarà moltiplicato singolarmente per 1, per 2, per 3, e per 4; si avranno: 6 nel primo posto della seconda linea, 2 nel secondo, 9 nel terzo, 5 e nel quarto e 2 nel quinto posto; ed ancora si fa la moltiplicazione con il 5, che è l'ultima figura del numero più piccolo, e si avrà 5 nel primo posto della terza linea, 0 nel secondo, 6 nel terzo, 1 nel quarto e 2 nel quinto. Si prosegue mettendo il 7 nel primo posto, sopra l'1; si sommano il 6 e il 4 che sono adiacenti diagonalmente al 7; si ha 10; lo 0 è messo sopra il 2 e l'1 viene mantenuto e ad esso vengono aggiunti il 5, il 2 e il 2, che sono situati diagonalmente dopo i suddetti 6 e 4; si ha 10; di nuovo lo 0 viene posto al terzo posto e l'1 viene mantenuto e aggiunto a 0, a 9 e a 0, che si trovano adiacenti in diagonale dopo i suddetti 5, 2 e 2; si ha 10; lo 0 è messo sopra il 4, che è nell'ultimo posto del numero più grande, e l'1 viene mantenuto e viene aggiunto al 6, al 5 e al 3, che seguono in diagonale; si ha 15; il 5 viene messo al quinto posto e l'1 conservato è aggiunto a 1 e 2 che sono in sequenza diagonale; si ha 4 che si pone nel sesto posto. Il 2, che è

```
2 4 5 0 0 0 7
    4 3 2 1
  3 0 2 4 7  7
  2 5 9 2 6  6
  2 1 6 0 5  5
```

nell'angolo del rettangolo dopo la diagonale di 1 e 2, si mette al settimo posto e si ha il prodotto.

74
25
49

Se si vuole conoscere l'addizione di 25 e 49, si mette il 49 sotto il 25, come se si dovessero moltiplicare tra loro; si aggiunge il 9 al 5; si ha 14; si mette il 4 sopra, al primo posto, e si mantiene l'1 che si aggiunge al 4 e al 2; si ha 7 che si mette al secondo posto, ottenendo quindi 74 per la somma cercata.

4690
123
4567

Se si vuole conoscere l'addizione di 123 e 4567, li scriviamo come viene mostrato; si aggiunge il 7 al 3; si ha 10; si mette lo 0 e si mantiene l'1 che si aggiunge al 6 e al 2; si ha 9 che si scrive sopra. Si aggiunge il 5 all'1, che sono nella terza posizione; si ha 6 che si pone nello stesso posto; per il 4, che è al quarto posto del numero in basso, si mette 4 nella quarta posizione e quindi si ottiene 4690 per l'addizione cercata.

511110
4321
506789

Se si vuole conoscere l'addizione di 4321 e 506789, li scriviamo nell'ordine prescritto; si aggiunge il 9 all'1; si ha 10; si mette lo 0 e si mantiene l'1 che si aggiunge all'8 e al 2; si ha 11; si mette l'1 e si mantiene l'1 che si aggiunge al 7 e al 3; si ha 11; si mette l'1 e si mantiene l'1 che si aggiunge allo 0 che è in basso; si ha uno che si mette al quinto posto; il 5 che rimane si mette nel sesto posto, e quindi si ha l'addizione cercata.

Il controllo.

Se si vuole eseguire il controllo con la prova del nove, come abbiamo fatto con le moltiplicazioni, si prende il residuo da nove di 4321, che è uno, e si aggiunge al residuo di 506789 che è 8; si ha 9 da cui, sottraendo 9, rimane o come residuo; quindi, prendendo il residuo dell'addizione fatta, cioè di 511110, si trova che è 0, come dovrebbe essere.

Mostriamo infine come procede tale controllo; siano .ab. e .bg. due numeri che vogliamo addizionare; la loro somma sarà quindi .ag. Sommando il residuo del numero .ab. e il residuo del numero .bg., si abbia .dg. In primo luogo, lasciamo che ciascuno dei numeri .ab. e .bg. sia divisibile per 9, cioè 9 sia il fattore comune dei numeri .ab. e .bg.; poiché il numero .ag. totale deve essere anche divisibile per 9, il suo residuo sarà 0, che sarà anche la somma dei residui dei numeri .ab. e .bg. Sia ora un numero divisibile per 9 e l'altro no, cioè .ab. sia divisibile per 9, e dal numero .bg. diviso per 9, rimanga il numero .dg.; .bd. e .ab. siano divisibili per 9 e quindi il numero totale .ad. sarà divisibile per 9. Poiché il numero .ag. supera il numero .ad. del numero .bd., e il numero .ad. è divisibile per 9, rimarrà, dal numero .ag. totale., il numero .dg., indivisibile per 9, che deve risultare dalla somma del residuo del numero .ab., che è 0, con il residuo del numero .bg., cioè .dg. Ancora, nessuno dei numeri .ab. e .bg. sia divisibile per 9, ma dal numero .ab. resti il numero .ae., e dal numero .bg. resti il numero .dg. Le parti restanti, cioè i numeri .eb. e .bd., risultano divisibili per 9. E poiché il loro totale .ed. è divisibile per 9, i numeri .ae. e .dg., il cui totale è .ag., restano indivisibile, e sono i residui dei numeri .ab. e .bg., da cui deve risultare il residuo del numero .ag., come si doveva dimostrare.

Se si vuole conoscere l'addizione di 25, 461, 6789, 58, 491, e 10718, si scrivono tutti i numeri in ordine, come mostrato, e si addizionano i numeri delle figure che sono al primo posto, iniziando con il più basso, ossia 8, 1, 8, 9, 1, e 5, usando sempre la mano sinistra; si ha 32; si mette il 2 e si mantiene il 3, a cui si aggiungono i numeri delle figure che sono al secondo posto, ossia 1, 9, 5, 8, 6, e 2; si ha 34; si mette il 4 e si mantiene il 3, col quale si continua sommando i numeri delle figure del terzo posto, cioè 7, 4, 7, e 4; si ha 25; si mette il 5 e si mantiene il 2, a cui si aggiungono i numeri delle figure del quarto posto, cioè lo 0 e il 6; si ha 8 che si mette; dopodiché si mette 1 per l'1 che si trova al quinto posto del numero più in basso, e nei restanti numeri non ci sono figure nello stesso posto; e quindi si avrà 18542 per l'addizione, come mostrato.

18542
25
461
6789
58
491
10718

Se si vuole verificare questa addizione, si sommano tutte le figure che sono in tutti i numeri, eliminando via via i nove, e quello che avanza dopo la cancellazione di tutti i nove sarà il residuo. Con l'aggiunta di molti numeri non abbiamo bisogno del controllo, perché possiamo altrettanto facilmente rifare la somma invece di trovare il residuo. Voglio inoltre mostrarvi questo modo di addizionare: tutte le figure che sono nei primi posti di tutti i numeri sono effettivamente addizionate; con questa addizione, poiché tutte le figure sono unità, si addizionano le unità dei numeri. Pertanto le unità sono messe nel primo posto, e le decine sono trattenute per il secondo, che è il posto delle decine; quindi, alle decine tenute aggiungiamo tutte le figure dei numeri che sono nel secondo posto; e siccome dal conteggio risultano molte unità, così avremo molte decine nell'addizione; quindi le unità sono messe nel secondo posto, in quanto queste unità sono decine, e per ogni decina è mantenuto uno per il terzo posto. Da dieci decine è fatto il numero cento; a queste unità vengono aggiunti i numeri nella terza posizione di tutti i numeri, e ciò che si ottiene dalla somma dei numeri del terzo posto sono le centinaia. Per questo motivo, le unità sono messe in terza posizione e le decine sono conservate per la quarta; così, continuando gradatamente, posto per posto, aggiungendo figure in posti consecutivi e mettendo sopra la fine dei numeri, produciamo il risultato.

Inoltre, le istruzioni scritte sopra sono applicabili ai numeri che uno vuole scrivere; si possono addizionare spese di spedizione e cose simili, espresse in libbre, soldi e denari; note di un ciambellano, di un segretario, o di un venditore, dette singolarmente spese, o acquisti di qualsiasi cosa. Si scrive il prezzo di ogni cosa in una tabella, ponendo libbre sotto libbre, soldi sotto soldi e denari sotto denari delle spese o costi di ciascun elemento; si scrivono in tabella i rapporti per ogni spesa, annotandone gli eventuali inganni presenti; quindi si addizionano correttamente nella tabella le spese relative ai denari, e si trasformano in soldi, che si tengono sopra nella casella riservata ai soldi; questi si addizionano ai soldi scritti sotto nella tabella e il risultato si trasforma in libbre, che si tengono nella colonna delle libbre; i soldi che superano le libbre si mettono sopra i soldi, dopo il resto dei denari; dopo questo si mette la somma della libbre, e quindi si avrà la somma della tabella. Per esempio, se si elencano certe spese relative ad alcune cose, come nella tabella seguente, scrivendo il numero di libbre, soldi e denari, come

indicato, si ha che i denari, che sono in totale 73, sono formati da 6 soldi e 1 denaro; i 6 soldi, aggiunti agli altri che sono nella tabella, fanno 122 che sono 6 libbre e 2 soldi; alle 6 libbre si aggiungono le altre libbre e si trova la somma di 368 libbre; quindi la somma totale è 368 libbre, 2 soldi e 1 denaro; questa somma si conserva in una pagina in cui sono le spese aggiuntive; e quindi, in ordine, si aggiungono le spese sommandole in ogni pagina; quindi si scrivono in una tabella le somme di tutte le pagine, e si esegue la somma delle somme; e quindi si potranno addizionare eventuali spese in bisanti, carati, once d'oro, tareni genovesi, quintali, papiri, e tutti gli oggetti simili.

		368	2	1
		libbre	*soldi*	*denari*
Per cose	*lii libbre iiii soldi ii denari*	52	4	2
Per cose	*xii libbre xv soldi v denari*	12	15	5
Per cose	*liii libbre*	53		
Per cose	*lxxx libbre*	80		
Per cose	*xv soldi*		15	
Per cose	*xviii soldi*		18	
Per cose	*viiii soldi x denari*		9	10
Per cose	*xi denari*			11
Per cose	*vii denari*			7
Per cose	*v libbre vi soldi xi denari*	5	6	11
Per cose	*viii libbre vii soldi v denari*	8	7	5
Per cose	*lxxxvii libbre viiii denari*	87		9
Per cose	*viii libbre vi soldi*	*8*	6	
Per cose	*xxvii libbre xv soldi vi denari*	27	15	6
Per cose	*xiii soldi*		13	
Per cose	*vii denari*			7
Per cose	*xxx libbre viii soldi*	30	8	
		6	6	

Somma ccclxviii libbre ii soldi i denaro

Capitolo 4

Inizia il quarto capitolo sulla sottrazione di numeri minori da numeri maggiori.

Volendo sottrarre un numero da un altro, si scrive il numero minore sotto il maggiore, ponendo posti simili sotto simili, e si comincia a sottrarre la prima figura del numero minore dalla prima nel maggiore, mettendo l'eccesso del numero sopra le prime figure. Quindi si sottrae il prossimo dal secondo, e si mette la differenza sopra le seconde figure, e la terza sopra le terze. E così con le altre figure, in ordine, sempre mettendo sopra le differenze. Quando la sottrazione della figura di un numero minore dalla figura del numero maggiore non è possibile, perché la figura del numero minore è più grande della figura del numero maggiore, allora si aggiunge dieci alla figura del numero maggiore, e si sottrae dalla somma la figura del numero minore. Per la somma della suddetta decina, una unità sarà tenuta in mano, per essere aggiunta alla figura seguente del numero minore, costruendo la quantità che sarà sottratta dalla figura superiore dello stesso posto, se è possibile, altrimenti si aggiunge anche qui una decina, come abbiamo fatto in precedenza; e così via, gradatamente, fino all'ultima figura del numero minore; se il numero maggiore supera in grado il numero minore, le figure presenti nei gradi in eccesso saranno messe alla fine. E così si avrà la differenza dei numeri sottratti. Ad esempio, se si vuole sottrarre 35 da 89, il 35 viene messo sotto l’89, come mostrato a margine; quindi il 5 viene sottratto dal 9; resta 4 che è messo sopra il 9; il 3 è sottratto dall’8; resta 5, che si mette sopra, ottenendo così 54 per la differenza della sottrazione proposta. Se uno vuole sottrarre 39 da 85, allora si scrivono i numeri come mostrato; si sottrae il 9 dal 5, che è impossibile. Si aggiunge il 10 al 5; si ha 15 da cui si sottrae il 9; resta 6 che si mette; per l'aggiunta di 10 si tiene in mano 1 che si aggiunge al 3; si ha 4, che si sottrae dall’8 ottenendo 4 che si pone al di sopra di detto 8, e così si avrà 46 per la differenza della sottrazione proposta.

54

89
35

46

85
39

Se si vuole sottrarre 80 da 392, si mette l’80 sotto il 392, si toglie 0 dal 2; rimane 2, che si mette; si sottrae l’8 dal 9; rimane 1 che si mette; dopo si mette il 3 che sta nel numero maggiore, e quindi si avrà 312 per la differenza di detta sottrazione.

312

392
80

Se invece uno vuole sottrarre 92 da 380, si scrive il 92 sotto il 380, e siccome è impossibile sottrarre il 2 dallo 0, alla stesso zero si aggiunge 10; si ha 10 da cui si sottrae il 2 che è minore; resta 8 che si mette, e del 10 aggiunto si tiene in mano 1 che si aggiunge al 9; si ha 10 da sottrarre da 8; ma ciò non è possibile; viene sottratto da 18; rimane 8 che si mette, e si mantiene 1 che si sottrae dal 3; resta 2 che si mette, e così si avrà 288 per la differenza di detta sottrazione.

288

380
92

482

939
457

Se è richiesta la differenza della sottrazione di 457 da 939, allora, scritti i numeri, si toglie 7 dal 9; resta 2 che si mette; siccome è impossibile sottrarre 5 da 3, si sottrae 5 da 13; rimane 8 che si mette, e si tiene in mano 1 che si aggiunge al 4; si ha 5 che sottrae dal 9; rimane 4 che si mette; e quindi si avrà 482 per la differenza di detta sottrazione.

Se si vuole sottrarre 841 da 15738, si toglie 1 da 8; resta 7 che si mette; si toglie il 4 dal 13, resta 9 che si mette, e si tiene in mano 1 che si aggiunge all'8; si ha 9 che si sottrae dal 17; rimane 8 che si mette, e si continua togliendo 1 dal 5, che è il quarto posto del numero superiore; resta 4 che si mette, e dopo si mette l'1 che rimane nel quinto posto dello stesso numero; e quindi si avrà 14897 per la differenza di detta sottrazione.

Il controllo.

	53337
Il	---------
residuo	81728
è 3	28391

Se si vuole avere il residuo di una sottrazione qualsiasi, si prende il residuo di ogni numero, come abbiamo insegnato per la moltiplicazione. Si sottrae il residuo del numero minore, se è possibile, dal residuo del numero più grande; altrimenti si aggiunge, al residuo del numero maggiore, un modulo, cioè 9, e fatta la differenza si avrà il residuo della sottrazione. Per esempio, il residuo del numero maggiore, cioè 81728, è 8, e del più piccolo, cioè 28391, è 5; e il 5 sottratto dall'8 dà 3 per residuo, come si trova per la differenza della sottrazione.

Ancora, 4562 sottratto da 8383 dà 3821. Il residuo del numero maggiore è 4, e del numero più piccolo è 8; e poiché non è possibile sottrarre l'8 dal 4, cioè il residuo del numero più piccolo dal residuo del numero maggiore, viene aggiunto 9 al residuo del numero più grande; si ha 13 da cui viene sottratto l'8, cioè il residuo del numero più piccolo; rimane 5 che è il residuo della differenza di detta sottrazione, cioè di 3821.

Una pagina del Liber Abaci

Capitolo 5

Inizia il quinto capitolo sulla divisione di numeri interi.

Quando si vuole sapere come dividere un qualsiasi numero per qualsiasi altro numero, è necessario, come nell'addizione, sapere prima dividere tutti i numeri per i numeri da due fino a dieci; e questo non è possibile fare fino a quando non si conoscano a memoria le divisioni di alcuni numeri; queste divisioni sono riportate in tabelle nelle pagine seguenti. Ma prima insegneremo come scrivere le piccole frazioni.

Se su un qualsiasi numero scriviamo una linea di frazione, e sulla stessa linea scriviamo un altro numero, il numero di sopra indica il numero di parti determinate dal numero di sotto; il numero di sotto è chiamato il denominatore e quello sopra è chiamato il numeratore. Se sopra al numero 2 scriviamo una linea di frazione, e sopra la linea di frazione scriviamo il numero 1, allora vogliamo intendere una delle due parti del tutto, cioè la metà; così, se mettiamo 1 sopra al numero 3, denotiamo un terzo; se sopra al numero 7, un settimo, se sopra al 10, un decimo, e se sopra al 19, intendiamo una diciannovesima parte dell'intera quantità, e così successivamente.

Ancora, se mostriamo 2 su 3, cioè 2/3, intendiamo due delle tre parti del tutto, cioè i due terzi. Se 2 su 7, cioè 2/7, due settimi, con 2 su 23, indichiamo due ventitreesimi, e così successivamente. Se il 7 è messo sopra al 9, cioè 7/9, intendiamo sette noni del tutto; se 7 è messo su 97, indichiamo sette novantasettesimi. 13 sopra 29 significa tredici ventinovesimi. Se 13 viene messo sopra 347, indichiamo tredici trecentoquarantasettesimi, e così intenderemo per gli altri numeri.

Se sotto una linea di frazione vengono messi più numeri, e sopra ciascuno di essi si scrivono altri numeri, allora il numero messo in testa, sopra la linea di frazione, sulla parte destra, indicherà il numero di parti determinate dal numero posto sotto di esso, come abbiamo detto prima. Ciò che è messo sopra il secondo è il numero di parti determinate dalla seconda delle parti determinate dal primo dei numeri messi sotto. Ciò che si intende con il numero sopra il terzo è il numero di parti determinate dal terzo numero sotto le parti determinate dal secondo numero sotto le parti determinate dal primo numero, e così si denota sempre il numero di parti determinate da tutti i numeri che seguono sotto la linea di frazione. Se sotto una certa linea di frazione si mettono 2 e 7, e su 2 si mette 1, e su 7 si mette 4, come viene visualizzato, si indicano quattro settimi e la metà di un settimo. Tuttavia, se sul 7 c'è 0, si leggerà la metà di un settimo. Se sotto un'altra linea di frazione sono 2, 6 e 10, e su 2 c'è 1, su 6 c'è 5 e su 10 c'è 7, come mostrato, il 7 che è sopra il 10 in testa alla linea di frazione rappresenta sette decimi, il 5 che è sopra il 6 indica cinque sesti di un decimo, e l'1 che è sul 2 denota una metà di un sesto di un decimo, e così singolarmente, uno alla volta, vanno letti; tuttavia è consigliabile sempre che i numeri minori siano verso sinistra sotto la linea di frazione, e se si

$\frac{1\ \ 4}{2\ \ 7}$

$\frac{1\ \ 0}{2\ \ 7}$

$\frac{1\ \ 5\ \ 7}{2\ \ 6\ \ 10}$

fanno diverse frazioni di una frazione, queste non corrispondano ad altre frazioni, e la frazione che è la maggior parte del tutto sia sempre messa verso destra. Si dice infatti che le frazioni che sono in una linea di frazione sono disposte a gradini rispetto alla frazione che è in testa alla linea di frazione, nella parte destra. La seconda è la frazione seguente verso sinistra. Ad esempio, nella linea di frazione scritta sopra, 7/10 è al primo posto della linea di frazione, 5/6 è al secondo, e 1/2 al terzo, che è l'ultimo posto della stessa linea di frazione, e quindi quei numeri che sono in linea di frazione sono tutti al loro posto. E se nella linea di frazione vi sono più frazioni, e la linea di frazione termina con un cerchio, come mostrato a lato, allora queste frazioni saranno intese in un altro modo, cioè: otto noni del tutto, e sei settimi di otto noni, e quattro quinti di sei settimi di otto noni, e due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni dei tutto. Se invece la linea di frazione termina con un cerchio dall'altra parte, come mostrato, indicherà: due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni del tutto. Infine, se le linee di frazione sono disegnate in quest'altro modo, denotiamo: cinque noni e un terzo e un quarto e un quinto di un nono. Questo essendo pertanto noto, le suddette divisioni, come sono scritte ed esposte nelle due pagine seguenti, sono da imparare a memoria.

2 4 6 8 ○
3 5 7 9

○ 8 6 4 2
9 7 5 3

1 1 1 5
5 4 3 9

	di	*è*	*resto*
$\frac{1}{2}$	1	0	1
$\frac{1}{2}$	2	1	
$\frac{1}{2}$	3	1	1
$\frac{1}{2}$	4	2	
$\frac{1}{2}$	5	2	1

$\frac{1}{2}$	6	3	
$\frac{1}{2}$	7	3	1
$\frac{1}{2}$	8	4	
$\frac{1}{2}$	9	4	1
$\frac{1}{2}$	10	5	

$\frac{1}{2}$	11	5	1
$\frac{1}{2}$	12	6	
$\frac{1}{2}$	13	6	1
$\frac{1}{2}$	14	7	
$\frac{1}{2}$	15	7	1

$\frac{1}{2}$	16	8	
$\frac{1}{2}$	17	8	1
$\frac{1}{2}$	18	9	
$\frac{1}{2}$	19	9	1
$\frac{1}{2}$	20	10	

$\frac{1}{3}$	1	0	1
$\frac{1}{3}$	2	0	2
$\frac{1}{3}$	3	1	
$\frac{1}{3}$	4	1	1
$\frac{1}{3}$	5	1	2
$\frac{1}{3}$	6	2	
$\frac{1}{3}$	7	2	1

$\frac{1}{3}$	8	2	2
$\frac{1}{3}$	9	3	
$\frac{1}{3}$	10	3	1
$\frac{1}{3}$	11	3	2
$\frac{1}{3}$	12	4	
$\frac{1}{3}$	13	4	1
$\frac{1}{3}$	14	4	2

$\frac{1}{3}$	15	5	
$\frac{1}{3}$	16	5	1
$\frac{1}{3}$	17	5	2
$\frac{1}{3}$	18	6	
$\frac{1}{3}$	19	6	1
$\frac{1}{3}$	20	6	2

$\frac{1}{3}$	21	7	
$\frac{1}{3}$	22	7	1
$\frac{1}{3}$	23	7	2
$\frac{1}{3}$	24	8	
$\frac{1}{3}$	25	8	1
$\frac{1}{3}$	26	8	2

$\frac{1}{4}$	1	0	1
$\frac{1}{4}$	2	0	2
$\frac{1}{4}$	3	0	3
$\frac{1}{4}$	4	1	
$\frac{1}{4}$	5	1	1
$\frac{1}{4}$	6	1	2
$\frac{1}{4}$	7	1	3
$\frac{1}{4}$	8	2	
$\frac{1}{4}$	9	2	1
$\frac{1}{4}$	10	2	2

$\frac{1}{4}$	11	2	3
$\frac{1}{4}$	12	3	
$\frac{1}{4}$	13	3	1
$\frac{1}{4}$	14	3	2
$\frac{1}{4}$	15	3	3
$\frac{1}{4}$	16	4	
$\frac{1}{4}$	17	4	1
$\frac{1}{4}$	18	4	2
$\frac{1}{4}$	19	4	3
$\frac{1}{4}$	20	5	

$\frac{1}{4}$	21	5	1
$\frac{1}{4}$	22	5	2
$\frac{1}{4}$	23	5	3
$\frac{1}{4}$	24	6	
$\frac{1}{4}$	25	6	1
$\frac{1}{4}$	26	6	2
$\frac{1}{4}$	27	6	3
$\frac{1}{4}$	28	7	
$\frac{1}{4}$	29	7	1
$\frac{1}{4}$	30	7	2

$\frac{1}{4}$	31	7	3
$\frac{1}{4}$	32	8	
$\frac{1}{4}$	33	8	1
$\frac{1}{4}$	34	8	2
$\frac{1}{4}$	35	8	3
$\frac{1}{4}$	36	9	
$\frac{1}{4}$	37	9	1
$\frac{1}{4}$	38	9	2
$\frac{1}{4}$	39	9	3
$\frac{1}{4}$	40	10	

$\frac{1}{5}$	5	1
$\frac{1}{5}$	10	2
$\frac{1}{5}$	15	3
$\frac{1}{5}$	20	4
$\frac{1}{5}$	25	5
$\frac{1}{5}$	30	6
$\frac{1}{5}$	35	7
$\frac{1}{5}$	40	8
$\frac{1}{5}$	45	9
$\frac{1}{5}$	50	10

$\frac{1}{6}$	6	1
$\frac{1}{6}$	12	2
$\frac{1}{6}$	18	3
$\frac{1}{6}$	24	4
$\frac{1}{6}$	30	5
$\frac{1}{6}$	36	6
$\frac{1}{6}$	42	7
$\frac{1}{6}$	48	8
$\frac{1}{6}$	54	9
$\frac{1}{6}$	60	10

$\frac{1}{7}$	7	1
$\frac{1}{7}$	14	2
$\frac{1}{7}$	21	3
$\frac{1}{7}$	28	4
$\frac{1}{7}$	35	5
$\frac{1}{7}$	42	6
$\frac{1}{7}$	49	7
$\frac{1}{7}$	56	8
$\frac{1}{7}$	63	9
$\frac{1}{7}$	70	10

$\frac{1}{8}$	8	1
$\frac{1}{8}$	16	2
$\frac{1}{8}$	24	3
$\frac{1}{8}$	32	4
$\frac{1}{8}$	40	5
$\frac{1}{8}$	48	6
$\frac{1}{8}$	56	7
$\frac{1}{8}$	64	8
$\frac{1}{8}$	72	9
$\frac{1}{8}$	90	10

$\frac{1}{9}$	9	1
$\frac{1}{9}$	18	2
$\frac{1}{9}$	27	3
$\frac{1}{9}$	36	4
$\frac{1}{9}$	45	5
$\frac{1}{9}$	54	6
$\frac{1}{9}$	63	7
$\frac{1}{9}$	72	8
$\frac{1}{9}$	81	9
$\frac{1}{9}$	90	10

$\frac{1}{11}$	11	1
$\frac{1}{11}$	22	2
$\frac{1}{11}$	33	3
$\frac{1}{11}$	44	4
$\frac{1}{11}$	55	5
$\frac{1}{11}$	66	6
$\frac{1}{11}$	77	7
$\frac{1}{11}$	88	8
$\frac{1}{11}$	99	9
$\frac{1}{11}$	110	10

$\frac{1}{12}$	12	1
$\frac{1}{12}$	24	2
$\frac{1}{12}$	36	3
$\frac{1}{12}$	48	4
$\frac{1}{12}$	60	5
$\frac{1}{12}$	72	6
$\frac{1}{12}$	84	7
$\frac{1}{12}$	96	8
$\frac{1}{12}$	108	9
$\frac{1}{12}$	120	10

$\frac{1}{13}$	13	1
$\frac{1}{13}$	26	2
$\frac{1}{13}$	39	3
$\frac{1}{13}$	52	4
$\frac{1}{13}$	65	5
$\frac{1}{13}$	78	6
$\frac{1}{13}$	91	7
$\frac{1}{13}$	104	8
$\frac{1}{13}$	117	9
$\frac{1}{13}$	130	10

$\frac{1}{13}$	143	11
$\frac{1}{13}$	156	12
$\frac{1}{13}$	169	13
$\frac{1}{13}$	182	14
$\frac{1}{13}$	195	15

Regola universale sulla divisione di numeri per numeri di primo grado.

Le istruzioni scritte sopra per la divisione sono state osservate, ed il loro uso è stato esaminato. Se si vuole dividere un numero di qualsiasi numero di posti per un numero di primo grado, vale a dire un numero da due fino a dieci, si scriverà il numero in una tabella, e si metterà la figura del numero per cui dividere sotto il primo posto del numero dato; si comincia la divisione dall'ultima figura del numero dato, dividendola, se sarà possibile, per la figura del numero per cui dividere, mettendo la divisione nella tabella sotto l'ultimo posto; se la divisione non è esatta, allora si mette l'eccesso sopra l'ultima figura; l'eccesso si accoppia con la figura che segue in modo da formare un numero di due figure, e si dividono le due figure, mettendo il quoziente sotto la figura seguente; e scrivendo l'eccesso, se c'è, sopra la stessa figura. E quindi, sempre accoppiando, nell'ordine prescritto, l'eccesso alle figure seguenti, e mettendo il quoziente che risulterà dalla divisione e l'eccesso come sopra descritto, procedendo per passi, si deve raggiungere la prima figura del numero. Accade spesso che alcune figure in qualche numero sono da dividere per una figura più grande di quella da essi mostrata; poiché tale divisione non è valida, si inizia la divisione dalla coppia formata con la figura successiva figura, mettendo il quoziente sotto la penultima figura, e l'eccesso sopra, operando come abbiamo detto; se l'eccesso non è grande come cinque, si divide la figura finché si trova un eccesso da accoppiare come insegnato; se la figura non si può dividere, perché è più piccola , si mette lo 0 sotto, ed essa si accoppia, come superfluo, alla figura seguente; e così si avrà la divisione di qualsivoglia quantità.

2
1
365
2
1

Se si vuole dividere 365 per 2, si scrive la figura 2 in alto nella tabella, evidenziandola; un altro 2 si mette sotto il 5, e si inizia dividendo il 3 per 2, vale a dire l'ultima figura, dicendo 1/2 di 3 è 1, e rimane 1; si scrive l'1 sotto il 3 e l'1 che rimane si scrive sopra, come si vede nella prima illustrazione; l'1 che rimane si accoppia con il 6 che si trova accanto all'ultima cifra data, dando 16; si prende 1/2 di 16 che è 8; si mette l'8 sotto il 6, accanto all'1 messo prima sotto il 3, come si vede nella seconda illustrazione; siccome non c'è resto nella divisione di 16, si divide il 5 per 2; il quoziente è 2 e il resto 1; si scrive il 2 sotto il 5 e l' 1 che rimane si scrive sopra; e si avrà così una metà del tutto; e prima del quoziente proveniente dalla divisione, vale a dire 182, si scrive 1/2, come mostrato nell'ultima illustrazione. Le frazioni vanno sempre messe dopo il tutto, così si scrive prima il numero intero, e quindi la frazione. S osservi ancora che quando un numero viene diviso per un altro numero, allora la moltiplicazione del quoziente per il divisore fornisce il numero che è il dividendo. Così se il 40 è diviso per 4, ne risulta 10. Pertanto moltiplicare il 4 per 10, fa quaranta, cioè il numero diviso.

10
365
18

101
365
182

Quoziente della divisione
½ 182

Allo stesso modo se 1/2 182 è moltiplicato per 2, ossia il quoziente per il divisore, allora si ha 365, vale a dire il numero da dividere o dividendo.

Se si vuole dividere lo stesso 365 per 3, si scrive il 3 sotto il 5, e si divide il 3 per 3; il quoziente è 1, che si mette sotto il 3. Si divide il 6 per 3; il

quoziente è 2, che si mette al di sotto del 6; si divide il 5 per 3; il quoziente è 1 e rimane 2; si mette l'1 sotto il 5 e il 2 sulla linea di frazione sul 3, il parziale, che si mette prima del quoziente della divisione, vale a dire 121, e quindi si avrà 2/3 121 per la divisione cercata. Si fa notare che che il numero diviso è chiamato il dividendo, il numero che divide è chiamato il divisore, e il numero risultante dalla divisione è chiamato il quoziente.

Divisione di 1346 per 4.

Se si vuole dividere 1346 per 4, si mette il 4 sotto il 6, si divide il 13 per 4, in quanto non si può dividere l'1 che è all'ultimo posto del numero; ne risulta 3 per il quoziente, e rimane 1; si mette il 3 sotto il 3 e il restante 1 si mette sopra il 3, e si accoppia l'1 con il 4 che precede il 3 nel numero; si ha 14; un quarto di 14 è 3, e rimane 2; si mette il 3 sotto il 4, e il restante 2 sopra, che accoppiato con 6 dà 26, che si divide per 4; il quoziente è 6, e il resto è 2; si mette il 6 sotto il 6, e il rimanente 2 sulla linea di frazione sul 4, il parziale, ad indicare due quarti del tutto che è pari alla metà del tutto; prima di questa frazione si mette il numero che è il quoziente della divisione, vale a dire 336; e quindi si avrà 1/2 336 per la divisione cercata. Per esempio, abbiamo diviso prima 13 per 4; 1346 termina al terzo posto con 13. Quindi avevamo 13 centinaia, perché il terzo posto è delle centinaia. Pertanto la divisione di milletrecento per 4, ci ha dato trecento, con il resto di un centinaio indivisibile. Quindi abbiamo messo il 3 al terzo posto, vale a dire nel posto delle centinaia, e l'1, che indicava l'eccesso di un centinaio, lo abbiamo messo sopra il 6; e accoppiato l'uno con il 4, abbiamo avuto 14 che termina nel secondo posto, cioè al posto delle decine. Quindi abbiamo diviso 14 decine per 4, ottenendo tre decine, e sono rimaste due decine indivisibili; quindi abbiamo messo il 3 sotto il 4 e il 2 sul 4, cioè sul posto delle decine, ed accoppiato il 2 con il 6 della prima posizione. Questo accoppiamento, che termina nel primo posto, ha dato 26 unità; abbiamo diviso le 26 unità per il 4, ottenendo 6 unità, col resto di 2. Quindi abbiamo messo il 6 al posto delle unità, e il 2 sulla linea di frazione sul 4, concludendo come già detto.

Divisione di 5439 per 5.

Se si vuole dividere 5439 per 5, si mette il 5 sotto il 9, e si dice 1/5 di 5 è 1, che si mette sotto il 5; e 1/5 di 4 è 0, e rimane 4; si mette lo 0 sotto il 4, ed il restante 4 si accoppia con il 3, e si dice 1/5 di 43 è 8, e resta 3; si mette l' 8 sotto il 3, e si prende un quinto del 3 accoppiato con il 9, vale a dire 39; il quoziente è 7, e il resto è 4; si mette il 7 sotto il 9 e il 4 sopra la linea di frazione sul 5, il parziale, mettendo la frazione prima del quoziente della divisione.

Divisione di 9000 per 7.

Se si vuole dividere 9000 per 7, si mette il 7 sotto il primo 0, e si divide il 9 per 7; il quoziente è 1, e il resto è 2; quindi si pone l' 1 sotto il 9 e il 2 sopra,

che accoppiato allo 0 che è dopo il 9 dà 20 che viene diviso per 7; il quoziente sarà 2, e il resto 6; si mette il 2 sotto lo 0, e il 6 sopra, che accoppiato con lo 0 seguente dà 60 che si divide per 7; il quoziente sarà 8, e rimane 4; si mette l'8 sotto lo 0, e sopra il 4 che accoppiato con lo 0 al primo posto fa 40, che si divide per 7; il quoziente è 5, e rimane 5; si mette il 5 sotto lo 0, e il 5 restante si mette sopra la linea di frazione sul 7, il parziale, e questa frazione si mette davanti al quoziente della divisione: 5/7 1285.

Divisione di 10000 per 8.

Se si vuole dividere 10000 per 8, si mette l' 8 sotto lo 0 del primo posto, e si dice 1/8 di 10 è 1, e rimane 2; si mette l'1 sotto lo 0 al quarto posto, e il 2 sopra; si prende 1/8 di 20, che è 2, e rimane 4; si mette il 2 sotto il terzo posto e il 4 sopra, e si prende 1/8 di 40 che è 5, che si mette sotto il secondo posto; e si riempie la fila di posti nel quoziente mettendo 0 sotto il primo posto, come si vede nell'illustrazione.

24
10000
8
1250

Divisione di 120037 per 9.

Se si vuole dividere 120037 per 9, si scrive il 9 sotto il 7, e si dice 1/9 di 12 è 1, e resta 3; si mette l'1 sotto il 2, e il 3 sopra; e 1/9 di 30 è 3, e rimane 3; si mette il 3 sotto lo 0 al quarto posto, e il 3 sopra; e si prende 1/9 di 30 che è 3, e rimane 3; si mette il 3 sotto lo 0 al terzo posto, e il 3 sopra lo stesso 0; e ancora una volta 1/9 di 33 è 3, e rimane 6; si mette 3 sotto il 3 e il 6 sopra, e si fa 1/9 di 67, che è 7, e rimane 4; si mette il 7 sotto il 7 e il 4 restante si mette sopra la linea di frazione sul 9, il parziale. E così, dopo questa descrizione , senza mai deviare, si saprà come eseguire tutte le divisioni simili; allo stesso modo si possono dividere tutti i numeri, anche per 11 e per 13; tuttavia si dovrebbero prima conoscere le introduzioni alle divisioni di tutti gli ordini, contenute nelle tabelle di cui sopra. Le divisioni per 11 salgono da una fino a 11decine, vale a dire a 110. E le divisioni per 13 salgono da una a 13 decine, vale a dire 130.

Divisione dei numeri per 11.

Note le suddette introduzioni, se si vuole dividere 12532 per 11, si mette l'11 sotto il 32, e si prende 1/11 del 12 in testa al dividendo, che è 1, e rimane 1. In verità 1/11 di 11 è 1, come mostra la tabella sopra scritta; pertanto 1/11 di 12 è 1, e rimane 1. Si mette l'1 sotto il 2 e l'1 di resto si mette sopra il 2, e si accoppia l'1 con la figura precedente, cioè con il 5, e fa 15, di cui si prende 1/11 che è 1, e da detto calcolo rimane 4; si mette l'1 sotto il 5 ed il 4 sopra il 5; si accoppia il 4 con la figura precedente, vale a dire con i 3, ottenendo 43; di questo si prende 1/11 che fa 3, e rimane 10, questo perché 1/11 di 33 è 3, quindi 1/11 di 43 è 3, con 10 di resto, come abbiamo detto; si mette quindi il 3 sotto il 3 e il 10 si mette sopra il 43; cioè, si mette l'1 sopra il 4 che è stato messo sopra il 5 e si mette lo 0 sopra del 3; e si accoppia di nuovo il 10 con la figura precedente, vale a dire con il 2 che

è al primo posto; si ha 102, di cui ancora si prende 1/11; il quoziente sarà 9, e rimane 3; si mette il 9 sotto detto 2, e il 3 di resto si mette sulla linea di frazione sopra l'11, il parziale; e si avrà 3/11 1139 per la divisione cercata.

Divisione per 13.

Se si vuole dividere 123586 per 13, allora il 13 viene messo sotto l'86; si divide il 123 per 13 perché 12 è inferiore a 13; il quoziente è 9, e rimane 6: 9 volte tredici è 117, e il resto fino a 123 è 6; si mette il 9 sotto il 3 del 123, e il 6 sopra lo stesso 3, e si accoppia il 6 con il 5; si ha 65, di cui 1/13 è 5; quindi si mette il 5 sotto il 5, e sopra si mette 0; poiché l'8 è inferiore a 13, lo si accoppia con il 6 che è al primo posto; si ha 86, di cui 1/13 è 6, e rimane 8; si mette il 6 al primo posto del quoziente, e 8 sulla linea di frazione sul 13, e si ha 8/13 9506 per la divisione cercata. Con questo metodo i numeri possono essere divisi per 17 e 19. Tuttavia si dovrebbero conoscere le introduzioni a questi numeri; queste introduzioni si possono imparare a memoria, anche se i numeri possono essere divisi per 17 e 19 con un altro metodo che mostreremo al suo posto.

Sulla divisione dei numeri in memoria e in mano.

Se si vuole lavorare il materiale delle divisioni in mente e in mano, si mantiene il numero da dividere in mano, e si tiene sempre il quoziente in mano, dividendo per fasi, iniziando con l'ultima cifra, mettendo sempre in mano i quozienti, tenendo sempre in memoria i resti, e cancellando passo dopo passo il dividendo dalla mano. Ad esempio, se si propone di dividere 7543 per 6, si mantiene il numero indicato in mano, e si divide il 7, che è nella mano destra al posto delle migliaia, per 6; il quoziente è 1, e rimane 1; si elimina il 7 dalla mano, e si mette l'1, e il resto 1 si tiene in mente, e si accoppia con il 5 che è nella mano destra al posto delle centinaia; si ha 15 che si divide per 6; il quoziente è 2, e rimane 3; si elimina il 5 dalla mano, e si mette il 2, e si mantiene il 3 in mente; questo si accoppia con il 4 che è nella mano sinistra al posto delle decine e si ha 34; questo si divide per 6; il quoziente è 5, e rimane 4; si elimina il 4 dalla mano, e si mette il 5, tenendo in mente il rimanente 4; si accoppia il 4 con il 3 che è in mano nel posto delle unità; si ha 43 che si divide per 6; il quoziente è 7, e rimane 1; si elimina il 3 dalla mano, e si mette il 7, e per il restante 1 si dice un sesto; e così si avrà 1/6 1257 in mano per la divisione cercata.

Divisione di 8059 per 5.

Se si vuole dividere 8059 per 5, si mantiene il numero in mano, e si dice 1/5 di 8, che si trova nella posizione delle migliaia, è 1, e il resto è 3; si elimina l'8 dalla mano, si mette l'1, e si mantiene il 3 in mente; e poiché per questo numero non c'è nulla in mano al posto delle centinaia, si dice che lì c'è 0, che accoppiato con il 3 tenuto fa 30, di cui 1/5 è 6, che si mette nel posto delle centinaia; e si divide dalla mano destra, dicendo 1/5 di

5 è 1, che si mette nel posto delle decine e si elimina il 5; si prende 1/5 di 9, che è 1, e si mantiene il 4 restante nel posto delle unità; si elimina il 9 dalla mano, e si mette l'1, e per il 4 che resta, si dice 4/5; e quindi si avrà 4/5 1611 per la divisione cercata, e così anche per le altre divisioni simili.

Quando si vuole dividere qualsiasi numero per 10, si elimina dal numero la figura nel primo posto, e si mette questa sopra il 10 che è sotto la linea di frazione, e si mette prima il numero che rimane dopo l'eliminazione di detta prima figura; e quindi si avrà la divisione del numero per 10. Ad esempio, se si vuole dividere 167 per 10, si elimina dal 167 la figura nel primo posto, cioè il 7, che si mette sopra il 10 come abbiamo detto, sulla linea di frazione, il parziale, e prima di questo si mette il numero rimasto, cioè il 16; e quindi si ha 7/10 16 per la cercata divisione. Se si vuole dividere 1673 per 10, si sopprime il 3 dal 1673, ottenendo 3/10 167 per la divisione cercata.

Iniziano le divisioni di numeri per numeri incomposti di secondo grado.

Alcuni numeri sono incomposti, e sono quelli che in aritmetica e geometria sono chiamati numeri primi. Questo perché non esistono numeri più piccoli, tranne l'unità, che sono loro fattori. Gli arabi li chiamano hasam. I greci li chiamano lineari; noi li chiameremo irregolari. Quelli che sono inferiori a 100 sono scritti in sequenza nella tabella a lato. Per gli altri numeri primi, maggiori di 100, insegnerò la regola per trovarli. Il resto sono numeri composti, o *epipedi*, cioè aree, come venivano chiamati dall'abilissimo geometra Euclide. Tutti questi numeri sono costruiti con la moltiplicazione, come dodici che è composto dalla moltiplicazione di 2 per 6, o 3 per 4; noi chiameremo questi numeri regolari. L'insegnamento della divisione per numeri primi e composti non è la stessa; vedremo prima come dividere per numeri che sono irregolari e inferiori a 100, e poi per qualsiasi altro numero maggiore esistente.

Tabella dei numeri Hasam

11	37	67
13	41	71
17	43	73
19	47	79
23	53	83
29	59	89
31	61	97

Quando si vuole dividere qualsiasi numero per qualsiasi altro numero irregolare, si scrive il numero in una tabella, e sotto si mette il numero primo per cui si vuole dividere, posizionando posti simili sotto posti simili, e si vede se le ultime due cifre del dividendo formano un numero maggiore, uguale o minore del numero primo per cui si deve dividere. Se si ha un numero maggiore o uguale, l'ultimo posto del numero quoziente inizierà dopo l'ultimo posto del numero dividendo, cioè sotto il penultimo, e si mette la figura che moltiplicata per il numero divisore rende il numero delle suddette ultime due cifre, o quasi. Si moltiplica questa per l'ultima figura del primo numero, cioè del divisore, e si sottrae il prodotto dall'ultima figura; e se questo eccede, si scrive l'eccesso sopra la figura. Si moltiplica la figura messa per la prima figura del divisore, si sottrae la moltiplicazione dalla penultima figura, e se il resto dà un numero di due cifre che è maggiore di 10, si pone il primo posto del numero sopra la penultima figura, e l'ultimo sopra l'ultima. Tuttavia, se manca il primo posto di eccedenza, cioè se è meno di 10, si mette la figura sopra il penultimo posto, e si accoppia l'eccesso con la terzultima figura. Sotto la terza figura si mette il moltiplicatore, cioè la figura che moltiplicata per lo stesso divisore rende il

numero di detta coppia, o quasi; il moltiplicatore si saprà con l'esperienza, in base alle differenze che si hanno nelle divisioni successive. Poi si moltiplica la figura messa sotto il terzo posto per l'ultima del divisore, e il prodotto si sottrarre, se possibile, dall'ultimo posto di detto eccesso dei numeri uniti; se no, si sottrae dalla coppia dell'ultimo e seguente, mettendo l'eccesso sopra, nello stesso posto. E ancora una volta lo si moltiplica per il primo posto del divisore, il prodotto si sottrae dal numero residuo, e l'eccesso si mette sopra. E così, sempre accoppiando l'eccesso con le figure dei posti seguenti, e ponendo sotto il moltiplicatore, si procede con zelo, moltiplicando secondo l'ordine prescritto, fino ad arrivare alla fine del numero. Accade spesso che, dall'accoppiamento dell'eccesso con la figura precedente, non si può sottrarre il numero divisore; allora si scrive uno 0 sotto la figura precedente, e si accoppia un altro numero precedente, ottenendo un altro eccesso; si mette sotto la figura che moltiplicata per il numero divisore rende il numero di dette tre figure, cioè quelle formate dall'accoppiamento delle due figure in eccesso con l'altra figura precedente.

Se invece le ultime due cifre del numero dividendo sono meno del numero divisore, come abbiamo detto all'inizio, l'ultimo posto del quoziente sarà sotto la terzultima figura; in tal modo tutti i numeri possono essere divisi per dati numeri primi. Per spiegare meglio quanto abbiamo detto, faremo alcuni esempi numerici.

Divisione di 18456 per 17

1
18456
17
108

Se si vuole dividere 18456 per 17, si scrive il 17 sotto il 56 del 18456, e si prende 1/17 del 18 formato dalle ultime due cifre del numero dividendo. Si ha 1, e rimane 1; si mette l'1 sotto l'8 di 18, e il restante 1 si mette sull'8, come mostrato nella prima illustrazione. Si accoppia l'1 con la figura precedente, cioè con il 4; si ha 14, e 14 è minore del numero divisore, cioè di 17, si mette lo 0 al di sotto del 4, vale a dire prima dell'1 messo sotto l'8, e si accoppia il 14 con la figura precedente, vale a dire con il 5, dando 145; al di sotto di detto 5 si mette la figura del moltiplicatore di 17 che più si avvicina al detto 145; il moltiplicatore si avrà con l'esperienza; si vede il numero divisore, ossia il 17, al quale decina è più vicino; è più vicino a 20; perciò si divide il detto 145 per 20, e si fa così: dal 20 si toglie la prima figura, vale a dire lo 0; resta il 2 del 20; si toglie anche la prima figura del 145, cioè il 5; resta14 che si divide per detto 2; il quoziente sarà 7; e tale, o 1 pù grande, deve essere la figura da deve mettere sotto il 5. Si è messo l'8, perché il 17 è inferiore al 20, per cui 1/17 di 145 è maggiore di 1/20. Si mette quindi l'8 al di sotto del 5 di 145, perché questo deve essere il quoziente. Si moltiplica l' 8 per 17 e si sottrae il prodotto dal 145, e si fa così: si moltiplica l'8 per l'ultima figura del 17, vale a dire l'1; il prodotto sarà 8 che si sottrae dal 14; rimane 6, che si mette sopra il 4 del 14, e si accoppia il 6 con il 5 precedente; si ha 65 dal quale si sottrae il prodotto dell'8 per l'altra figura del 17, cioè il 7; il prodotto è 56, e rimane 9, che è quanto rimane dalla sottrazione dal 145 del prodotto dell'8 per 17, come è mostrato nella seconda illustrazione. Si pone quindi il 9 sopra il 5, e si

6
149
18456
17
108

accoppia con la figura precedente, vale a dire con il 6, facendo 96, da dividere per il 17 e mettere il risultato sotto il 6. Ancora si cerca una figura che moltiplicata per 17 dà un numero il più vicino possibile al 96. Per conoscere questa figura, si lascia fuori il 6 dal 96, e il 9 che rimane si divide per il 2, come si faceva prima con il 14; il quoziente sarà 1/2 4; quindi si mette il 5, che è maggiore di 1/2 4, sotto il 6, che è il primo posto del numero quoziente, e si moltiplica il 5 per l'1 di 17, cioè per l'ultima sua cifra; si ha 5, che si sottrae dal 9 messo sopra il 5; resta 4, che si mette al di sopra del 9, e si accoppia il 4 con il 6 precedente, vale a dire con quello accoppiato prima con il 9; si ha 46 dal quale si sottrae il prodotto del 5 per 7, che è 35; ci resta 11 che si mette sopra la linea di frazione sul 17, il parziale, da mettere davanti al quoziente, cioè a 1085; e quindi si avrà 11/17 1085 per la divisione cercata, come viene mostrato in questa ultima figura.

6
149
18456
17
108

$\frac{11}{17}$ 1085

Se si vuole dividere lo stesso 18456 per 19, si scrive il 19 sotto il 56 del 18456. Si mette sotto il 4 del 184 la figura che moltiplicata per 19 realizza un prodotto di circa 184; la si trova con lo stesso metodo insegnato con il 17, cioè, si rimuove il 4 dal 184 lasciando 18, che si divide per 2; il quoziente è 9, e tale sarà la figura da mettere sotto il 4, cioè sotto la terza figura del dividendo; si moltiplica il 9 per l'1 del 19; si ha 9 che si sottrae dal 18; resta 9 che si mette sopra l'8, e si accoppia il 9 con il 4 dal quale si sottrae il prodotto del 9 per il 9 del 19, che è 81; resta 13; si mette il 13 sopra il 94, cioè l'1 sopra il 9 e il 3 sul 4, come mostrato nella prima illustrazione. Il 13 si accoppia con la figura precedente, vale a dire con il 5; si ha 135. E si mette sotto il 5 la figura che moltiplicata per 19 dà un prodotto di 135 o meno, e questa è 7; questo perché se il 5 viene rimosso dal 135, resta 13, che diviso per 2 dà 6 o più; quindi si mette il 7 sotto il 5 e si moltiplica per l'1 del 19; si ha 7, che sottratto dal 13 dà 6, che si mette sul 3 del 13 e si accoppia con il 5 facendo 65, da cui si sottrae il prodotto del 7 per 9, che è 63; rimane 2, che si mette sopra il 5, come è mostrato nella seconda figura. Si accoppia il 2 con la figura precedente, vale a dire con il 6 che è nel primo posto; si ha 26 che si divide per 19, come abbiamo detto; il quoziente è 1 e rimane 7; si mette l'1 nel primo posto del quoziente, cioè sotto il 6 e il restante 7 si mette sopra la linea di frazione sul 19, per il parziale; e il numero quoziente, cioè 971, si mette prima della frazione; e così si avrà 7/19 971 per la divisione cercata, come mostrato nell'ultima illustrazione.

1
93
18456
19
9

16
932
18456
19
97

16
932
18456
19
971

$\frac{7}{19}$ 971

Vi abbiamo mostrato, nelle illustrazioni precedenti, come dividere per i numeri 17 e 19; ora vi mostriamo come dividere per i restanti numeri primi che sono inferiori a 100. Si fa così: quando dividiamo per 17 o per 19, prendiamo metà del numero dividendo, dopo aver rimosso la prima figura, o 1 in più se la figura rimossa è cinque, perché 17 e 19 sono meno di 20, come abbiamo detto prima; quando dividiamo per 23, prendiamo la metà, o se la prima figura è cinque, 1 in meno, perché 23 è più di 20; se dividiamo per 29, dobbiamo prendere un terzo, e se cinque, 1 in più, perché 29 è inferiore a 30, che è la decina più vicina. Quando dividiamo per 31, dobbiamo prendere un terzo, e se il primo posto è cinque, 1 in meno. Se dividiamo per 37 prendiamo un quarto, se cinque, 1 in più. Se dividiamo per 41 o 43 dobbiamo prendere un quarto, se cinque, 1 in meno. Quando dividiamo per

47 dobbiamo prendere un quinto, se cinque, 1 in più. Quando per 53, un quinto, se cinque, 1 in meno; quando per 59, un sesto, o 1 in più. Quando per 61, un sesto, o 1 in meno. Quando per 79 dobbiamo prendere un ottavo, o 1 in più. Quando per 83, un ottavo, o 1 in meno. Quando per 89, un ottavo, o 1 in più. Quando dividiamo per 97 prendiamo un decimo del numero dividendo con una cifra soppressa; se cinque, 1 in più. Quando si deve dividere un numero per un altro numero e si ignora se si deve dare in più o in meno, come abbiamo detto, si mette la parte dichiarata in precedenza e si moltiplica per il numero divisore; se il prodotto è maggiore rispetto al dividendo, si dà 1 in meno, e se è inferiore, si dà 1 in più; e così si potrà dividere qualsiasi numero per un altro numero dato. Tuttavia diremo questo di nuovo in alcune divisioni.

Divisione di 13976 per 23.

11
13976
23
6

Se si vuole dividere 13976 per 23, si mette il 23 al di sotto del 76; poiché il 23 è superiore al 13, cioè al numero formato dalle ultime due figure del numero dividendo, vengono prese le ultime tre figure; il numero è 139, per cui l'ultimo posto del numero quoziente è sotto il 9; si mette 6, che si trova dal materiale dato per i moltiplicatori, in questo modo: si lascia fuori la prima cifra di 139, vale a dire il 9, rimane 13, che si divide per 2, perché il 23 è più vicino al 20 rispetto a qualsiasi altra decina; il quoziente è 6 e mezzo, di cui dobbiamo mettere meno, perché il 23 è più rispetto al 20; lasciamo fuori la metà, e mettiamo il 6 sotto il 9, come abbiamo detto; si moltiplica il 6 per il 2 del 23; si ha 12 che si sottrae dal 13; rimane 1, che si mette sopra il 3, e si accoppia con 9; si ha 19. Si moltiplica il 6 per il 3 che è in 23; si ha 18, che si sottrae dal 19; resta 1 che si mette sul 9, come è mostrato nella prima illustrazione. Si accoppia l'1 con il 7 che precede nel numero; si ha 17; il 17 è inferiore a 23, si mette lo 0 sotto il 7 e il 6 che è nel primo posto del numero viene accoppiato con il 17; si ha 176; si mette sotto il 6 la figura che moltiplicata per il 23 dà quasi 176; dal calcolo prescritto si ha 7, che è meno della metà di 17; quindi si moltiplica il 7 per il 2 che è nel 23; si ha 14 che si sottrae dal 17; resta 3, che si mette sopra il 7, e si accoppia con il 6 nel primo posto; si ha 36 dal quale si sottrae il prodotto di 7 per il 3 del 23; resta 15, che si mette sopra la linea di frazione sul 23, il parziale, come mostra l'ultima illustrazione.

3
117
13976
23
607

$\frac{15}{23}$ 607

Controllo della divisione sopra scritta.

Se si vuole controllare la divisione sopra scritta con la prova del nove, si prende il residuo di 13976, che è 8, e si tiene da parte. Si prende il residuo del quoziente, ossia di 607, che è 4, e si moltiplica per il residuo di 23 che è 5; si ha 20; si prende il residuo di 20 che è 2, e si aggiunge al 15 che è sopra la linea di frazione sul 23; si ha 17, il cui residuo è 8, come quello di sopra che abbiamo tenuto da parte. Infatti, il divisore moltiplicato per il quoziente dà il dividendo; quindi se moltiplichiamo il residuo del divisore per il residuo del quoziente, risulta il residuo del dividendo; ma dal numero

divisore 23 ci è rimasto 15, che sottratto da 13976 dà 13961, che diviso per 23 rende 607. Quindi, la moltiplicazione di 23 per 607 dà 13961. Per cui, se il residuo di 607, che è 4, è moltiplicato per il residuo di 23, che è 5, risulta 20, di cui il residuo è 2, che è anche il residuo di 13961, che aggiunto al residuo di 15, che è 6, rende 8, cioè il residuo di 13976; e questo abbiamo voluto dimostrare. In verità, moltiplicazioni, addizioni, sottrazioni, e divisioni di numeri possono essere controllate in un altro modo, scacciando altri numeri, cioè il 7 e tutti gli altri numeri primi esistenti, come 11, 13, e così via. Lo dimostreremo nel seguito, usando un metodo appropriato.

Se si vuole dividere 24059 per 31, si scrive il 31 sotto il 24059, e si mette il 7 sotto lo 0 perché il 31 è un po più di 30. Onde se prendiamo 1/3 di 24, vale a dire il 240 senza la prima figura a sinistra, avremo 8 che è superiore a 7 per una terza parte. Avendo messo, come abbiamo detto, il 7 sotto lo 0, e seguendo l'ordine prescritto, si moltiplica il 7 per il 3 del 31; si ha 21 che si sottrae da 24; resta 3, che si pone al di sopra del 4, e si moltiplica il 7 per 1 del 31; si ha 7, che si sottrae dal 30; resta 23 che si pone al di sopra del 30, e se si vuole, si trascura il 3, o lo si tiene in memoria per la cancellazione. Quindi si accoppia il 23 con il 5; si ha 235, e si mette ancora il prescritto 7, vale a dire meno di un terzo di 23, sotto il 5, e lo si moltiplica per il 3; si ha 21 che si sottrae dal 23; resta 2; si mette il 2 sul 3, quindi si ignora il 23, e si accoppia il 2 con il 5; si ha 25, sempre accoppiando il precedente con il seguente; si moltiplica il 7 per 1; si ha 7, che si sottrae dal 25; resta 18 che si mette al di sopra del 25, dimenticando il 25. Quindi si prende l/3 di 18 dal calcolo sopra descritto; si ha 6. Si mette il 6 sotto il 9, e sotto l'1 del 31; si moltiplica per il 3 del 31; si ha 18; si dimentica il 18 messo sopra, e si moltiplica il 6 per 1; si ha 6 che si sottrae dal 9; resta 3 che si mette sulla linea di frazione sul 31, il parziale. E quindi si avrà 3/31 776 per la divisione cercata, come mostrato nella figura. Vorrei mostravi come questo metodo produca il quoziente; abbiamo messo sotto il terzo posto del numero dividendo ciò che moltiplichiamo per il 3 che è all'ultimo posto del divisore, ed occupa il secondo posto, sotto il secondo posto del numero dividendo; e da questa moltiplicazione risulta un numero che termina al quarto posto; pertanto, quando si moltiplica il terzo posto per un posto qualsiasi, si ottiene il terzo posto per quello che si moltiplica, o un numero che termina in esso. Il quarto posto è il terzo partendo dal secondo. Pertanto si sottrae il prodotto del 7 per 3, vale a dire 21, dal 24 che termina al quarto posto, e si mette il 3 sul quarto posto, cioè sopra il 4, e si accoppia il 3 con lo 0 che è al terzo posto del numero dividendo, la coppia è 30; poi si moltiplica il 7 per l'1 che è nello stesso posto del divisore; e così moltiplichiamo il terzo posto per il primo, che è come moltiplicare il primo per il terzo. Pertanto il prodotto del 7 per 1, vale a dire 7, lo sottraiamo dal 30, che termina al terzo posto; quindi, dalla moltiplicazione del terzo posto per il primo, o il primo per il terzo, risulta un numero del terzo posto, o che termina in esso; mettiamo il 23 sopra il 30 o al suo posto; accoppiamo il 23 con il 5 che è al secondo posto, e abbiamo 235 che termina nel secondo posto; mettiamo un altro 7 al secondo posto, che moltiplichiamo ancora per il 3 del divisore, che è al secondo posto dal secondo; da questa moltiplicazione risulta un numero del

1
22
338
24059
31
776
$\frac{3}{31}$ 776

terzo posto, o che termina in esso; quindi si sottrae il 21 dal 23, in quanto entrambi terminano nel terzo posto; e il 2 che rimane lo mettiamo sopra il 3, e lo accoppiamo con il seguente 5, si ha 25, che termina al secondo posto; da questo si sottrae il prodotto del 7 per 1, vale a dire il secondo posto per il primo; da questa moltiplicazione risulta un numero del secondo posto, o che termina in esso; resta 18 nello stesso posto del 25, vale a dire nel terzo posto, e 8 nel secondo; si accoppia 18 con il 9 nel primo posto; si ha 189; mettiamo il 6 nel primo posto del numero quoziente, e lo moltiplichiamo per il 3, ossia il primo posto per il secondo; da questa moltiplicazione risulta un numero che termina al secondo posto; il prodotto è 18 da cui si sottrae il 18 sopra citato, che termina nel secondo posto; moltiplichiamo il 6 per 1; si ha 6, che si sottrae dal 9 che è nello stesso posto; resta 3, che diviso per il 31 rende 3/31; e quindi abbiamo 3/31 776; e con questo metodo si possono comprendere le divisioni simili. Se si vuole conoscere come controllare una determinata divisione scacciando i sette, si prende il residuo modulo 7 di 24059, che è l'eccesso o resto del numero dopo averlo diviso per 7; questo resto si prende così: si dice 1/7 del 24; resta 3; del 30, cioè di esso accoppiato, resta 2; del 25 rimane 4; del 49 rimane 0 per il residuo cercato. Nello stesso modo si prende il residuo di 776, che è 6, e si moltiplica per il residuo del 31 che è sotto la linea di frazione, che è 3; si ha 18, che si divide per 7; resta 4 che si aggiunge al 3 che è sopra la linea di frazione sul 31; si ha 7 che si divide per 7; rimane 0 come dovrebbe rimanere per il residuo.

Divisione di 780005 per 59.

Se si vuole dividere 780005 per 59, si scrivono i numeri, e si mette l'1 sotto l'8; togliamo l'8 dal 78, poi dividiamo il 7 per il 6, perché 59 è circa 60; il quoziente è 1 e qualcosa. Mettiamo l'1 sotto l'8, come abbiamo detto prima; moltiplichiamo l'1 per il 5; si ha 5 che si sottrae dal 7; resta 2 che si mette sopra il 7, si moltiplica lo stesso 1 per il 9 e si sottrae il prodotto dal 28; resta 19, si cancella o ignora il 2 sopra il 7, e si mette o dice 19 al di sopra del 78. Si mette il 3 sotto lo 0 secondo quanto prescritto, e si moltiplica per il 5; si ha 15 che si sottrae dal 19; resta 4; si cancella il 19, e al posto del nove si mette il 4. Si moltiplica lo stesso 3 per 9 e si sottrae dal 40; Resta 13; si cancella il 4 e si mette l'1, e sopra lo 0 si mette il 3; quindi si divide il 130 per il 59; si ha 2, che si mette sotto lo 0 del terzo posto; si moltiplica il 2 per 59 e il prodotto viene sottratto dal 130; resta 12; lo stesso 2 si moltiplica per il 5, si sottrae dal 13, si moltiplica per il 9, e si sottrae dal 30; quindi si cancella il 13, si mette l'1 al posto del 3 del 13, e si mette il 2 sopra lo 0 nella terza posizione. Quindi si mette il 2 sotto lo 0 al secondo posto, si moltiplica per il 59, e si sottrae il prodotto dal 120; rimane 2 sopra lo 0; si elimina il 120 che rimane dopo la divisione, e si dice che eliminare figure o rimuoverle è come pensarle cancellate o rimosse; dopo si accoppia il 2 con il 5 che è al primo posto; si ha 25; siccome questo è inferiore al 59, si mette 0 sotto il 5, e 25 sulla linea di frazione per il parziale, come chiaramente raffigurato.

1
141
29322
780005
59
13220

$\frac{25}{59}$ 13220

Poiché le divisioni date sono state chiaramente spiegate, divideremo un certo numero per 97; sia 5917200 scritto in basso, e il 97 sia messo sotto i due zeri; si divide il numero delle ultime tre cifre del numero dividendo, cioè il 591 per 97; per questa divisione il quoziente è 6 perché il 97 è più vicino a 100 che a qualsiasi altro multiplo di dieci. Per cui si divide il 59, cioè il numero delle ultime due cifre, per 10; il risultato della divisione è quasi 6, vale a dire meno di dieci; e siccome il 97 è inferiore al 100, dobbiamo prendere più di cinque decine. Ne prendiamo 6; si mette il 6 sotto il primo posto del numero delle stesse tre figure, cioè sotto l'1 che è al quinto posto dell'intero numero; si moltiplica il 6 per il 9 del 97; si ha 54 che si sottrae dal 59, ossia dal numero delle ultime due cifre; rimane 5 che si mette sopra il 9; si moltiplica il 6 per il 7 del 97; si ha 42 che si sottrae dal 51, vale a dire dall'accoppiamento del 5 messo sopra con il precedente 1; rimane 9 che si mette sopra l'1 con il 5 messo, che si cancella, o si ignora. Il suddetto 9 messo sopra l'1 è il resto dalla divisione di 591 per 97; 9 è accoppiato con la figura precedente in posizione, vale a dire con il 7 che è al quarto posto del numero; si ha 97, che si divide per 97, vale a dire per il divisore; il quoziente è 1; si mette l'1 sotto il 7, e si moltiplica per il 9 del 97; si ha 9; si toglie 9 dal resto, e si moltiplica l'1 per 7; si ha 7, per cui rimane 7 che è stato accoppiato con il 9; e nulla rimane del 7 da accoppiare con il precedente 2, e questo 2 è inferiore al 97; si mette 0 al di sotto del 2, e si accoppia il 2 con lo 0 che lo precede, e si ha 20. Poiché anche questo 20 è inferiore al 97, si mette 0 sotto lo 0 accoppiato con il 2, vale a dire sotto a quello che è nel secondo posto del numero; dopo di che si accoppia il 20 con lo 0 che lo precede, vale a dire con ciò che è nel primo posto; si ha 200 che è diviso per 97; si ha 2 che viene messo sotto lo 0 al primo posto, per il ragionamento fatto sopra; si moltiplica il 2 per il 9, e si sottrae dal sopra accoppiato 20; resta 2, che si mette sopra lo 0 del secondo posto; l'accoppiamento di questo con il precedente 0 che è al primo posto è 20, da cui si sottrae il prodotto di 2 per 7; resterà 6 che si mette sopra la linea di frazione sul 97, per il parziale; e si avrà 6/97 61002 per la divisione cercata.

59
5917200
97
6

Abbiamo visto la divisione dei numeri per un numero di due cifre che è irregolare, cioè primo, mostreremo ora le stesse divisioni per numeri che sono composti, cioè regolari, ed inoltre come dividere qualsiasi numero per un numero composto, come per i numeri primi; mostreremo tuttavia come moltiplicare facilmente, con le seguenti regole di composizione dei numeri, vale a dire come trovare i numeri di cui essi sono composti; metteremo questi sotto una certa linea di frazione, e sempre il minore seguirà il maggiore verso sinistra, come abbiamo insegnato in precedenza in questo capitolo; Dopo ciò, si divide il numero dividendo per il più piccolo dei componenti del divisore, cioè per il numero più piccolo, o la figura sotto la linea di frazione; e se qualcosa avanza, si mette sopra la stessa figura o numero; si divide il quoziente della divisione per il numero precedente, o la figura nella frazione, e il resto, se ci sarà, lo si mette sul numero precedente o figura. E così, sempre in ordine, con i numeri componenti precedenti che appaiono come quozienti delle divisioni, si cerca di dividere fino alla fine; ed i resti sono messi su di loro, ed i numeri quoziente dalla divisione

dell'ultimo componente, che è l'ultimo numero esistente sotto la linea di frazione, si mettono prima. E così si avrà la divisione di ogni numero per qualsiasi numero composto di qualsiasi numero di posti. Prima di dichiarare ciò dimostrato, bisogna trovare le composizioni dei numeri composti, nonché quelli che sono noti per essere irregolari; si procede a dimostrare il necessario. Avendo mostrato nella tabella precedente i numeri di due cifre che sono irregolari, mostriamo ora le regole di composizione per numeri di due cifre, indicandole una per una sotto la linea di frazione; mostreremo poi come trovare la composizione dei numeri regolari con altro numero di posti.

ECCO LE REGOLE DI COMPOSIZIONE
PER NUMERI DI DUE CIFRE

12	$\frac{1\ 0}{2\ 6}$	30	$\frac{1\ 0}{3\ 10}$	46	$\frac{1\ 0}{2\ 23}$	62	$\frac{1\ 0}{2\ 31}$	77	$\frac{1\ 0}{7\ 11}$	92	$\frac{1\ 0}{4\ 23}$
14	$\frac{1\ 0}{2\ 7}$	32	$\frac{1\ 0}{4\ 8}$	48	$\frac{1\ 0}{6\ 8}$	63	$\frac{1\ 0}{7\ 9}$	78	$\frac{1\ 0}{6\ 13}$	93	$\frac{1\ 0}{3\ 31}$
15	$\frac{1\ 0}{3\ 5}$	33	$\frac{1\ 0}{3\ 11}$	49	$\frac{1\ 0}{7\ 7}$	64	$\frac{1\ 0}{8\ 8}$	80	$\frac{1\ 0}{8\ 10}$	94	$\frac{1\ 0}{2\ 47}$
16	$\frac{1\ 0}{2\ 8}$	34	$\frac{1\ 0}{2\ 17}$	50	$\frac{1\ 0}{5\ 10}$	65	$\frac{1\ 0}{5\ 13}$	81	$\frac{1\ 0}{9\ 9}$	95	$\frac{1\ 0}{5\ 19}$
18	$\frac{1\ 0}{2\ 9}$	35	$\frac{1\ 0}{5\ 7}$	51	$\frac{1\ 0}{3\ 17}$	66	$\frac{1\ 0}{6\ 11}$	82	$\frac{1\ 0}{2\ 41}$	96	$\frac{1\ 0\ 0}{2\ 6\ 8}$
20	$\frac{1\ 0}{2\ 10}$	36	$\frac{1\ 0}{4\ 9}$	52	$\frac{1\ 0}{4\ 13}$	68	$\frac{1\ 0}{4\ 17}$	84	$\frac{1\ 0\ 0}{2\ 6\ 7}$	98	$\frac{1\ 0\ 0}{2\ 7\ 7}$
21	$\frac{1\ 0}{3\ 7}$	38	$\frac{1\ 0}{2\ 19}$	54	$\frac{1\ 0}{6\ 9}$	69	$\frac{1\ 0}{2\ 23}$	85	$\frac{1\ 0}{5\ 17}$	99	$\frac{1\ 0}{9\ 11}$
22	$\frac{1\ 0}{2\ 11}$	39	$\frac{1\ 0}{3\ 13}$	55	$\frac{1\ 0}{5\ 11}$	70	$\frac{1\ 0}{7\ 10}$	86	$\frac{1\ 0}{2\ 43}$	100	$\frac{1\ 0}{10\ 10}$
24	$\frac{1\ 0}{3\ 8}$	40	$\frac{1\ 0}{4\ 10}$	56	$\frac{1\ 0}{7\ 8}$	72	$\frac{1\ 0}{8\ 9}$	87	$\frac{1\ 0}{3\ 29}$		
26	$\frac{1\ 0}{2\ 13}$	42	$\frac{1\ 0}{6\ 7}$	57	$\frac{1\ 0}{3\ 19}$	74	$\frac{1\ 0}{2\ 37}$	88	$\frac{1\ 0}{8\ 11}$		
27	$\frac{1\ 0}{3\ 9}$	44	$\frac{1\ 0}{4\ 11}$	58	$\frac{1\ 0}{2\ 29}$	75	$\frac{1\ 0\ 0}{3\ 5\ 5}$	90	$\frac{1\ 0}{9\ 10}$		
28	$\frac{1\ 0}{4\ 7}$	45	$\frac{1\ 0}{5\ 9}$	60	$\frac{1\ 0}{6\ 10}$	76	$\frac{1\ 0}{4\ 19}$	91	$\frac{1\ 0}{7\ 13}$		

Una regola universale per trovare
la composizione dei numeri dispari.

Inoltre, usando frequentemente le regole sopra scritte, e volendo trovare la regola, cioè la composizione di qualsiasi numero con tre o più figure, o volendo sapere che è un numero primo secondo la regola, si scrive il numero nella tabella, e si dice se il numero è pari o dispari. Se è pari, allora se ne ricerca la composizione. Tuttavia, se è dispari, allora sarà composto o primo. I numeri pari possono essere composti da pari e dispari, oppure solo da dispari. Quindi, in primo luogo mostreremo le regole per i numeri pari. I umeri dispari sono composti solo da dispari. Onde investigheremo prima i loro componenti in numeri dispari. Per cui, quando nella figura al primo

posto di qualsiasi numero dispari vi è il numero 5, si saprà che 5 è un fattore, cioè che il numero è divisibile per 5. Tuttavia, se un'altra figura dispari compare al primo posto, allora si prende il residuo dell'intero numero dalla prova del nove; se risulta 0, allora 1/9, e se il residuo sarà 3 o 6, allora 1/3 sarà nella composizione; se il residuo non è nessuno di questi, si divide per 7; se ci sarà un eccesso, si divide ancora il numero per 11; e se c'è un eccesso, si divide di nuovo per 13, e si continua sempre in ordine a dividere per numeri primi, in base a ciò che è scritto sopra nella tabella, fino a quando si troverà un numero primo con il quale si può dividere il numero proposto, o senza raggiungere un numero primo con il quale si può dividere, e da lì fino alla radice quadrata; se non si potrà dividere per nessuno di loro, si giudicherà il numero essere primo. Tuttavia, se si potrà dividerlo per qualche dato numero primo, senza superarlo, ciò che la divisione produrrà, lo si divide ancora una volta per esso; e il numero quoziente che si ottiene dalla divisione, lo si divide nuovamente per lo stesso numero primo; questo è ciò che si comincia a trovare: i componenti del numero in ordine rispetto al resto dei numeri primi, fino alla radice quadrata; se non si trovano, allora il numero non avrà componenti; e così via, sempre ottenendo risultati, finché si avranno tutti i componenti. Dopo aver fatto questo, si avrà cura di raccoglierli sotto una linea di frazione, dal minore al maggiore. E così si avrà la regola per la composizione di un qualsiasi numero dispari. Per esempio, supponiamo che sia 805 il numero di cui si chiede la regola di composizione; poiché 5 è un fattore primo di questo numero, senza dubbio la sua composizione include 1/5. Perciò si divide il numero per 5; il quoziente è 161, di cui si prende il residuo, che è 8; questo mostra che 161 non può essere diviso integralmente né per 3 né per 9. Per cui lo si divide per 7; il quoziente è 23, un numero irregolare; si inseriscono gli elementi ottenuti, vale a dire il 5, 7, e 23 sotto una linea di frazione, e si avrà $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 7\ 23}$ per la composizione di 805, che è un quinto di un settimo di una ventitreesima parte, che è una ottocentocinquesima parte; pertanto il prodotto di 5 per 7, vale a dire 35, per 23, dà 805. Ancora, se si cerca la regola di composizione per 957, si divide per 3 perché 3 è il residuo del numero; il quoziente è 319 che non può essere diviso ancora per 3 perché il residuo è 4; lo si divide per 7, il resto è 4; quindi è divisibile per 11, ed è 11 volte 29 che è un numero primo; quindi abbiamo trovato la regola di composizione per 957 che raccogliamo sotto la linea di frazione: $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 11\ 29}$.

Trovare la regola di composizione per 951.

Se si vuole trovare la regola di composizione per 951, si divide per 3, in quanto il residuo è 6; il quoziente è 317, e la ricerca di componenti per esso è impossibile, poichè non si può dividere integralmente per 7 oppure 11, oppure 13, o 17. E non si cercano più componenti, perché se fosse divisibile per 19, lo sarebbe per qualche numero primo prima del 19; quindi, la regola di composizione per 951 è $\frac{1\ 0}{3\ 317}$. Se si vuole averla per 873, siccome il residuo del numero è 0, quando si divide per 9, il quoziente è 97;

il numero 97 risulta primo nella tabella precedente. Abbiamo trovato la regola, che raccolta sotto la linea di frazione sarà 1/9 di 1/97.

Trovare la regola per 1469.

Se si vuole avere la regola di composizione per 1469, si prende il residuo del numero che è 2; ciò mostra che la composizione è priva di tre o nove. Se lo dividiamo per 17, il resto è 6; se per 11, il resto è 6; se si divide per 13, allora il quoziente è 113; perciò non si dovrebbero cercare altri numeri primi, o dividere ancora per lo stesso 13, in quanto13 è maggiore della radice quadrata; quindi sappiamo quali sono i numeri primi e la regola di composizione del 1469 è la seguente: $\frac{1\quad 0}{13\ 113}$.

Trovare la regola di composizione per 2543.

Se si vuole averla per 2543, si prende il residuo del numero che è 5; ciò mostra che non può avere né 3, né 9 nella sua regola di composizione. Dividendo per sette, rimane 2. E per 11, resta 2; e per 13, l'eccesso è 8. E poi si scopre che non si può dividere per 17, o 19, o 23, o 29, o 31, o 37, o 41, e neanche per 47 o 53; e al di là di 53 non si cerca, perché 53 è maggiore della radice quadrata. E se fosse possibile nella composizione di 2543 avere un numero primo maggiore di 53, questo numero dovrebbe essere moltiplicato per un qualcosa di inferiore a 53, per ottenere il 2543, il che è impossibile, perché fino a 53 non abbiamo trovato niente cercando la regola; perciò 2543 è irregolare.

Ancora, se si vuole averla per per 624481, allora si vede che né 3, né 9, né 7, sono nella composizione del numero; esso è divisibile per 11 la cui parte, ovvero un undicesimo, è 56771, che si divide nuovamente per 11, perché non può essere diviso per numeri che sono inferiori a 11, cioè per 9, 7 e 3, che non sono stati trovati nel 624481. Ma anche nella composizione di questo, cioè del 56771, si potrà trovare un altro 11. Da questa divisione, vale a dire per 11, il quoziente è 5161, che si divide ancora una volta per 11; resta 2. Quindi avere di nuovo 1/11 di esso è impossibile; dopo di ciò si vede se si ha 1/13; vale a dire si divide per 13; il quoziente è 397, di cui né 1/13, né 1/17 e né 1/19 può essere trovato. Quindi sappiamo che 397 è primo, non essendoci tra 19 e la sua radice quadrata alcun numero primo; è irregolare, come abbiamo detto prima, perché al di là della radice quadrata non ci può essere nessun fattore. La regola di composizione cercata per 624481 è infatti questa: $\frac{1\quad 0\quad 0\quad 0}{11\ 11\ 13\ 397}$.

624481
11
56771
11
res. 2 5161
13
397
$\frac{1\quad 0\quad 0\quad 0}{11\ 11\ 13\ 397}$

Un controllo della precedente regola di composizione.

Se si vuole controllare la regola di composizione per residui di 7, si prende il residuo di 624481 dal 7, che è 4, e lo si tiene da parte; si prende il residuo dell'11 al primo posto sotto la linea di frazione che è 4, e lo si moltiplica per 4, cioè per il residuo dell'altro undici; si ha 16 che si divide per 7; resta 2

che si moltiplica per 6, vale a dire per il residuo di 13; si ha 12 da cui si sottrae 7; rimane 5 che si moltiplica per 5, e cioè per il residuo di 397; si ha 25 che si divide per 7; resta 4 per il residuo.

Su un metodo universale per trovare la regola di composizione dei numeri pari.

Se si vuole trovare la regola di composizione per un certo numero pari, si prende analogamente il suo residuo dal 9; se è 0, allora si avrà 1/9. Se è 3 o 6, allora la regola avrà 1/6 nella sua composizione. Tuttavia, se non c'è alcun residuo di esso, si controlla ciò che rimane dividendo per 8 il numero di due cifre che è nei posti primo e secondo, perché se è 0, e la figura del terzo posto appare pari, 2 o 4 o 6 o 8 o 0, allora l'intero numero, di qualsiasi numero di posti, può essere diviso per 8. Se invece la terza figura è dispari, 1 o 3 o 5 o 7 o 9, allora il numero avrà 1/4 nella sua composizione. Se si ha 4 come resto, e la figura del terzo posto è dispari, allora l'intero numero sarà similmente divisibile per 8. E se è pari, avrà 1/4 nella sua composizione. Tuttavia, se il resto è 2 o 6, allora il numero sarà divisibile soltanto per il numero pari 2. E si prosegue così, prendendo i componenti pari, finché si verifica la regola, o se c'è qualche numero dispari, per esso si cerca di individuare la composizione secondo la regola precedente. Se nel primo posto di un numero c'è uno 0, viene rimosso, e per esso si avrà 1/10 nella composizione del numero. E se rimane qualche altro 0 in testa al numero, allora si rimuove, e di nuovo ci sarà 1/10 nella composizione dello stesso numero. E così sempre, per quanti 0 appaiano in testa al numero, si deve capire questo. E con ciò abbiamo trovato la regola di composizione dei numeri pari, come chiaramente indicato nella dimostrazione.

Trovare la regola di composizione per 126.

Se è richiesta la regola di composizione regola per 126, di cui il residuo è 0, questo mostra che nove è un fattore integrale; quindi si divide 126 per 9; il quoziente è 14, per il quale la regola $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ è mostrata sopra nella tabella della regole di composizione per i numeri di due cifre; quindi si avrà $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 7\ 9}$ per la regola per 126, come è qui mostrato.

Se è richiesta la regola per 156, allora il suo residuo è 3 e questo dimostra che può essere diviso per 6. Se diviso per 6, il quoziente è 26 la cui regola è $\frac{1\ 0}{2\ 13}$; e così si avrà la regola per 156, come qui mostrata: $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 6\ 13}$.

3
2112
6
3
352
8
44
$\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 6\ 8\ 11}$

Se vuole trovare la regola per 2112, siccome il suo residuo è 6, questo mostra che può essere diviso per 6. Pertanto 2112 è diviso per 6; il quoziente è 352 di cui si prende il residuo, che è 1; questo mostra che non può essere diviso né per 6, né per 9; onde 52, vale a dire un numero di due cifre, è diviso per 8; dalla divisione rimane 4; dal resto, e dalla figura nel terzo posto del numero, cioè il 3 visto prima, è dimostrato che 352 può essere diviso per 8, ed è diviso per 8; il quoziente è 44 per il quale la regola è $\frac{1\ 0}{4\ 11}$; quindi la

regola per 2112 è qui indicata: $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 6\ 8\ 11}$. Come $\frac{1\ 0}{4\ 6}$ che è contenuta nella frazione è una regola per 24, un'altra regola per 24 si trova nella tabella di composizione dei numeri, vale a dire $\frac{1\ 0}{3\ 8}$, dove compare la cifra 8 che è maggiore del 6 che è in $\frac{1\ 0}{4\ 6}$; quindi si prende sempre la regola estrema, fra le regole composte da numeri che vanno da 2 a 10, come mostreremo in seguito. Perciò congiuntamente è stata trovata la regola, vale a dire $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 8\ 11}$.

Trovare la regola di composizione per 4644.

Se si vuole trovare la regola per 4644, il suo residuo è pari a 2. Ciò mostra che né 1/6 né 1/9 possono essere nella regola. E poiché il numero di due cifre in testa, cioè il 64, ha 8 come divisore con resto 0, e la figura al terzo posto, vale a dire 6, è pari, si sa che 4664 ha 1/8; perciò dividendo per 8, si ha 583 come quoziente; per quanto detto prima, si cercherà la regola per numeri dispari, e si trova che è $\frac{1\ \ 0}{11\ 53}$; quindi per 4664 si ha la regola: $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{8\ 11\ 53}$.

Se si vuole trovarla per 13652, essendo il residuo 8, mancano 1/6 e 1/9. Se il numero di due cifre che compare in testa sarà diviso per 8, rimarrà 4. Onde, siccome la figura del terzo è 6, un divisore esiste, e nella regola si ha 1/4; quindi si divide il 13652 per 4, e si ha 3413, cui manca una regola; si avrà $\frac{1\ \ 0}{4\ 3413}$ per la regola del 13652.

Trovare la regola di composizione per 15560.

Se si vuole trovare la regola per 15560, siccome c'è lo 0 in testa, viene rimosso. Perciò si avrà 1/10 nella regola del numero dato; si cerca poi di trovare la regola del resto del numero, vale a dire di 1556, che ha residuo 8; si vede che la regola manca di 1/6 e 1/9. E poiché il numero di due cifre in testa, che è il 56, è divisibile per 8 con resto 0, e la figura del terzo posto che è 5 è dispari, si vede che nella regola non ci può essere un numero pari maggiore di 4. Si divide quindi 1556 per 4; il quoziente è 389 per il quale non esiste alcuna regola. Per cui la regola per 15560 è la seguente: $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ 10\ 389}$

33
1556
4
389
$\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ 10\ 389}$

Se si vuole trovare la regola per 32600, siccome nel primo posto c'è 0, deve esserci 1/10 nella regola. Rimosso lo 0 del numero, resta 3260. Nel primo posto c'è ancora 0, per cui si ha ancora 1/10. Rimuovendo lo 0 dal numero, resta 326 il cui residuo 2, nega 1/6 o 1/9 nella composizione. Il 26 delle due figure in testa al 326, non può essere diviso per alcun numero pari, salvo per 2. Onde 326 è diviso per 2; il quoziente è 163 a cui manca una regola. Si ha $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{2\ 10\ 10\ 163}$ per la regola di 32600.

Se si vuole trovarla per 7546000, vengono rimossi i tre zeri dal numero e si ha $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{10\ 10\ 10}$; rimane 7546 di cui il residuo, vale a dire 4, nega 1/6 o 1/9 nella sua composizione. Se il 46 che è in testa al 7546 è diviso per 8, rimane 6; quindi 7546 non avrà nessun altro numero pari salvo 2 per cui può essere

diviso; 7546 è diviso per 2, il quoziente è 3773. La sua regola, secondo quanto detto per i numeri dispari, risulta essere $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{7\ 7\ 7\ 11}$. Riorganizzando questa con la regola trovata sopra, vale a dire $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 10\ 10\ 10}$, si avrà: $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 7\ 7\ 10\ 10\ 10\ 11}$ per la regola di 7546000.

La divisione di 749 per 75.

Se si vuole dividere 749 per 75, si ricerca il fattore 5, e si trova la regola per 75, cioè $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 5\ 5}$. Si divide il 749 per 3; il quoziente è 249, e rimane 2 che si mette sul 3 nella frazione; si divide il 249 per il 5, che precede il 3 nella frazione; il quoziente è 49, e rimane 4; questo 4 si mette sopra il 5, e si divide nuovamente il 49 per il 5, che si trova alla fine della frazione; il quoziente è 9, e rimane 4; 4 si mette sul 5 e il 9 si mette prima della frazione; e quindi si ha $\frac{2\ 4\ 4}{3\ 5\ 5}9$ per la divisione cercata.

La divisione di 67898 per 1760.

Se si vuole dividere 67898 per 1760, allora si trova la regola per 1760 che è $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 8\ 10\ 11}$; si divide il 67898 per 2; il quoziente è 33949, e rimane 0; lo 0 si mette sopra il 2, e si divide 33949 per 8; il quoziente è 4243, e rimane 5; il 5 si mette sopra l'8 della frazione, e si divide 4243 per 10; il quoziente è 424, e rimane 3; la figura del primo posto di 4243 viene interrotta; 424 si divide per 11; il quoziente è 38, e rimane 6; si mette il 6 sull'11 della frazione e il 38 si mette prima della frazione; e quindi si ha $\frac{0\ 5\ 3\ 6}{2\ 8\ 10\ 11}38$ per la divisione cercata.

Controllo della divisione soprascritta.

Se si vuole controllare la divisione scacciando i 13, si divide il 67898 per 13; resta 12 come residuo. Dopodiché, si divide il 38 posto prima della frazione per il 13; resta 12 che si moltiplica per l'11 dalla frazione, e si aggiunge il 6 che è al di sopra dell'11; si ha 138 che si divide per il 13; rimane 8 che si moltiplica per il 10 della frazione, e si aggiunge il 3 che è sopra il 10; si ha 83 che si divide per 13; rimane 5 che si moltiplica per l'8 della frazione, e ad esso si aggiunge il 5 che si trova sopra l'8; si ha 45 che si divide per il 13; rimane 6 che si moltiplica per il 2 della frazione; si ha 12, come il residuo mantenuto sopra. Si impari ad aver cura, in una divisione, a non scacciare un numero che sta nel denominatore della frazione, perché ciò può trarre facilmente in inganno; perciò in questa divisione è vietato cacciare l'11, perché il residuo che rimane da 38, o da qualsiasi numero che viene moltiplicato per l'11 che è sotto la linea di frazione e poi diviso per il residuo, non sopravviverà; onde se il 38 non è corretto, allora l'errore non può essere rilevato scacciando undici. C'è poi un'altra difficoltà nella dottrina della divisione dei numeri, cioè quando il numero dividendo ha

qualche comunanza con il divisore, ossia quando il numero dividendo è integralmente divisibile per un numero o numeri che sono nella regola di composizione del divisore. Allora, prima il numero viene diviso per il numero della composizione del divisore che avrà se stesso nel dividendo, purché sia maggiore o minore nella frazione, perché se si divide qualcosa per sé nulla resta dalla divisione. Quanto qui si è percepito, sarà mostrato con i numeri nella proposizione seguente.

La divisione di 81540 per 8190.

Se si vuole dividere 81540 per 8190, allora si trovala la regola di composizione del divisore, che è $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{7\ \ 9\ \ 10\ \ 13}$, con 1/10 nella regola di 81540 per lo 0 che è al primo posto, anche se 1/10 non è in testa nella frazione; quindi 81540 viene dapprima diviso per 10 rimuovendo lo 0 dal numero; rimane 8154; estratto 1/10 dalla frazione rimane da dividere 8154 con $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{7\ \ 9\ \ 13}$. Si divide 8154 per 9 della frazione, perché 0 è il suo residuo della prova del nove; il quoziente è 906, che resta da dividere con $\frac{1\ \ 0}{7\ \ 13}$; il 906 è diviso per 7; il quoziente è 129, e rimane 3; 3 si mette sopra il 7. Si divide il 129 per 13; il quoziente è 9, e rimane 12; il 12 si mette sopra il 13, e il quoziente 9 si mette davanti al frazione; e per la divisione cercata si avrà $\frac{3\ \ 12}{7\ \ 13}9$.

Se si vuole controllare la divisione precedente, si mettono il 10 ed il 9 estratti dalla frazione sotto la riga dopo il 7, e sopra di essi si mettono gli zeri, così: $\frac{0\ \ 0\ \ 3\ \ 12}{10\ \ 9\ \ 7\ \ 13}$; dopo di ciò si potrà controllare ordinatamente in base alla procedura. In alternativa si abbiano 906 come dividendo, e $\frac{1\ \ 0}{7\ \ 13}$ come divisore, e con questi si esegua il controllo con il metodo sopraddetto. Abbiamo visto la divisione dei numeri per dati numeri composti, salvo l'esistenza nella composizione di qualche numero di tre o più cifre. Per completare la dottrina della divisione contenuta in questo lavoro, mostreremo come dividere per numeri che sono di tre o più cifre.

La divisione dei numeri per numeri primi di tre posti.

Volendo dividere un numero di qualsiasi numero di posti per un numero di tre cifre, cioè tre posti, mette posti simili del numero di tre figure sotto posti simili del numero dividendo, e vede se il numero delle ultime tre cifre del numero dividendo appare più grande del numero divisore; se sarà maggiore o uguale, allora l'ultimo posto del numero quoziente inizierà sotto la terza figura dall'ultima, e se sarà più piccolo inizierà sotto la precedente, cioè sotto la quarta dall'ultima. La figura scelta, messa sotto il predetto posto, viene moltiplicata per il numero divisore, per cui è diviso il numero maggiore, formando un numero di tre cifre, o le ultime quattro, o quasi, in quanto non ve ne saranno più di quelle del numero divisore. Perciò si moltiplica per l'ultima cifra del numero divisore, e il prodotto si sottrae, se

possibile, dal numero dell'ultima cifra, se no, si sottrae dal numero delle ultime due cifre, e si mette il resto sopra il posto da cui il prodotto è stato sottratto. La cifra messa si moltiplica per la precedente del numero divisore, cioè per ciò che è nella seconda posizione, e il prodotto trovato si sottrae dall'eccesso sopra accoppiato con la figura precedente nel numero maggiore; se ci sarà un eccesso, si mette al primo posto sopra la stessa figura precedente, e il resto viene cancellato, cioè si cancella l'altro eccesso posto prima. Quindi si moltiplica la figura messa per la figura del primo del numero divisore e il prodotto si sottrae dall'accoppiamento del secondo eccesso con la figura precedente del numero maggiore; il primo posto dell'eccesso si mette sulla figura precedente; il resto va eliminato, cioè si cancella un altro secondo eccesso.

Dopo di ciò si mette un altra figura sotto un'altra figura precedente del numero maggiore, cioè prima della cifra messa prima e moltiplicata per il prescritto numero divisore; si fa un accoppiamento del terzo eccesso con la figura precedente, e questo viene moltiplicando per le cifre del numero divisore, come insegnato con la prima figura messa, mettendo sempre ordinatamente l'eccesso sopra; e allo stesso modo si lavora per gradi con le cifre restanti, procedendo fino alla fine. Se da qualche sopraddetta cifra in eccesso e precedente sarà prodotto un numero inferiore al divisore, allora si mette lo 0 sotto la figura precedente, e si accoppia la figura precedente e l'eccesso con un'altra figura precedente; la cifra sarà messa sotto a quella prima dello 0 suddetto, e se ancora l'eccesso accoppiato alle due figure precedenti è meno del divisore, di nuovo si mette un altro 0, e si accoppia il suddetto eccesso e le suddette altre due figure alla figura precedente; dopo di ciò si mette una figura che moltiplica il numero divisore, il numero in eccesso e le tre figure precedenti; quindi si avrà una divisione simile; per esporre chiaramente ciò che abbiamo detto, mostriamo un esempio numerico.

64
1349
257
5
$\frac{64}{257}$ 5

Se si desidera dividere il 1349 per 257, si scrive il 257 sotto il 349 del 1349. Il numero formato dalle ultime tre cifre del dividendo, che è il 134, è inferiore al 257, cioè al numero divisore; perciò, la figura del numero quoziente che occupa il primo posto sarà messa sotto la quarta figura del numero dividendo, cioè il 9; il numero che moltiplicato per 257 rende quasi 1349 è 5, che è messo sotto il 9; si moltiplica 5 per l'ultima cifra del numero divisore, vale a dire per 2; si ha 10 che si sottrae da 13, ossia dal numero delle ultime due cifre del numero dividendo, poiché non si può sottrarre dal numero dell'ultima figura; resta 3 che si accoppia con il precedente 4; si ha 34 da cui si sottrae il prodotto del 5 messo con il 5 del numero divisore; rimane 9, che si pone al di sopra del 4; si moltiplica il 5 messo per 7; si ha 35 che si sottrae dal 99, ovvero dall'accoppiamento del 9 con il primo posto del numero dividendo; resta 64 che si mette sopra la linea di frazione del suddetto 257. Il quoziente 5 si mette prima della frazione; e per la divisione cercata si avrà il risultato mostrato in figura.

La divisione di 30749 per 307.

Se si vuole dividere 30749 per 307, si scrive il 307 sotto il 749; e poiché il 307, che è il numero delle ultime tre cifre del numero dividendo, è uguale al numero divisore, si mette 1 sotto la prima posizione delle tre figure dette, cioè sotto il 7 che si trova nella terza posizione del numero dividendo; si moltiplica l'1 per il 3 del divisore; si ha 3, che viene sottratto dal 3 che si trova nell'ultimo posto del dividendo; si moltiplica ancora l'1 per lo 0 del divisore e si ha 0; per cui lo 0 che è nel numero divisore si lascia; si moltiplica ancora l'1 per il 7 e si ha 7, che si sottrae dal 7 che è nel numero dividendo. Quando il terzo posto moltiplica qualsiasi posto, si ottiene il terzo posto al di là di ciò che si moltiplica. Pertanto, quando si moltiplica il terzo, si ha il quinto posto; quando si moltiplica il secondo, si ha il quarto; quando si moltiplica il primo, si ha il terzo. Il 4 che precede il 7 nel numero dividendo è inferiore al 307, cioè al divisore; si mette 0 sotto il 4, e ancora il 49 del numero dividendo è inferiore al 307; si mette 0 sotto il 9, vale a dire al primo posto del numero quoziente; e il suddetto 49 si mette sopra la frazione del 307, il parziale, e il quoziente 100 si mette prima della frazione; e si avrà il risultato in figura per la divisione cercata.

49
30749
307
100
$\frac{49}{307}$ 100

Se si vuole dividere 574930 per 563, si mette il 563 sotto il 930; si mette il moltiplicatore 1 sotto il 4, cioè nel quarto posto; si moltiplica per il 5 del numero divisore e si ha 5 che si sottrae dal 5 che si trova nell'ultimo posto del numero dividendo; quando si moltiplica il terzo posto per il quarto posto, si ha il sesto posto, cioè il quarto al di là di ciò che si moltiplica; si moltiplica l'1 per il 6 del divisore e si ha 6 che si sottrae dal 7; resta 1 che si mette sopra il 7; quando si moltiplica il quarto posto per il secondo, si ha il quinto; e ancora si moltiplica l'1 per il 3 del divisore e si ha 3 che si sottrae dal 4, cioè da 14, a causa dell'1 che sta sopra il 7; quando si moltiplica il quarto posto per il primo, si ha il quarto, o il numero termina in esso. E poiché il detto 3 viene sottratto dal 4 che è al quarto posto, cioè dal 14 che termina in esso, resta 11, che va sopra il quinto e il quarto posto; si accoppia il 9 con questo 11 e si ha 119 che è inferiore al 563, cioè al divisore; si mette 0 sotto il 9, e si accoppia il 3 che è nel secondo posto del numero dividendo con il 119, formando 1193. Pertanto si mette nel secondo posto un moltiplicatore tale che moltiplicato per il 563 dia quasi 1193; questa cifra sarà 2 che si moltiplica per il 5 del divisore e si ha 10, che si sottrae dall'11 scritto lasciando 1; si lascia l'1 messo sopra il 4 e si rimuove l'altro 1 che è sopra il 7; si moltiplica il 2 per il 6 del divisore e si ha12 che si sottrae dal 19; rimane 7 che si pone sopra il 9; si rimuove l'1 che è sopra il 4, si moltiplica il 2 per il 3 del divisore e si ha 6 che si sottrae dal 73; resta 67; si toglie il 7 che sopra al 9 e si pone il 67 sopra il 93, come nella figura. Si accoppia il 67 con lo 0 e si ha 670; per moltiplicatore si mette 1 sotto lo 0, e si moltiplica per il 5 del divisore dando 5, che si sottrae dal 6; rimane 1; si toglie il 6 e si mette l'1; si moltiplica l'1 per 6 e si sottrae dal 7; rimane 1; si toglie il 7 e si mette l'1; si moltiplica l'1 per il 3 del divisore e si ha 3 che si sottrae dal 110; rimane 107 che si mette sopra la frazione di 563, e prima si mette il quoziente 1021, come mostrato nella figura.

107
670
1193
574930
563
1021
$\frac{107}{563}$ 1021

Controllo della divisione sopra scritta.

Se si vuole controllare la divisione scacciando gli 11, si divide il 574930 per 11; resta 4, che si mantiene per il residuo; analogamente si divide il quoziente 1021 per 11; rimane 9 che si moltiplica per il 2 che rimane dalla divisione del 563 per 11; si ha 18, al quale si aggiunge il residuo del numero rimanente sulla frazione, cioè 107, che ha residuo 8, perché quando 107 è diviso per 11 rimane 8; e così si avrà 26 che quando è diviso per 11 lascia 4 per residuo, come deve essere. Nel trovare il moltiplicatore da moltiplicare per il numero quoziente, quando un numero di tre cifre o più è diviso da un numero di tre cifre, di cui abbiamo insegnato la tecnica, si considera se il numero divisore è più o meno vicino ad alcune centinaia, e si cerca una figura nel numero quoziente da mettere contro quel numero, e si lasciano le due figure che sono nella sua prima e seconda posizione. Si divide il resto dei numeri per il numero di centinaia appare più vicino, e si mette la figura che si ottiene: poco più, se il divisore è inferiore al previsto numero di centinaia, o poco meno, se il divisore sarà superiore al numero di centinaia. Per esempio, se vogliamo dividere il 1247 per 421, lasciamo fuori 4, e dividiamo il 12 che rimane per 4, poiché il 421 è più vicino a 400 di qualsiasi altro numero di centinaia; il risultato è 3; il moltiplicatore è più piccolo, perché il 421 è più di 400, e sarebbe più grande con meno di 379 come divisore; e in tal modo si comprende il resto. Se il numero divisore è un centinaio e mezzo,150, o 250, e così via, si raddoppia il numero delle due predette figure restanti, si divide la quantità raddoppiata per il doppio delle centinaia, e si avrà la figura del moltiplicatore. Ad esempio, vogliamo dividere il 2137 per 563; dividiamo il 21 per 1/2 5, cioè il doppio di 21, cioè 42, per il doppio di 1/2 5, cioè 11; il quoziente sarà 3 e qualcosa; e così si trova il moltiplicatore in simili situazioni.

Se si vuole dividere 5950000 per 743, allora si scrive giù il numero; si sceglie il moltiplicatore come sopra; si mette 8 sotto lo 0 del quarto posto, poiché dopo aver rimosso 50 dal 5950, rimane 59; se si divide il doppio di 59 per il doppio di 1/2 7, perché il divisore è vicino a 750, risulta 8, che si moltiplica per il 7 del divisore; si ha 56 che si sottrae dal 59; resta 3 che si mette sopra il 9. L'8 viene moltiplicato per il 4 e si ha 32 che si sottrae da 35; resta 3, che si pone al di sopra del 5; si cancella il 3 che è stato messo sopra il 9; 8 per il 3 del divisore dà 24 che si sottrae dal 30; rimane 6 che si pone al di sopra dello 0; si cancella il 3, che era al di sopra del 5; quindi, si moltiplica sempre singolarmente la figura messa per le figure del numero divisore, a partire dall'ultima e salendo fino alla prima, lasciando sempre in figura la divisione, con la figura messa sotto questa in precedenza, come mostrato nel primo esempio di questa divisione. Dopo di ciò si mettono due zeri sotto i due zeri del terzo e secondo posto, ma entrambi questi zeri, accoppiati con il 6, fanno una quantità più piccola del numero 743. Per cui si divide per 743 il dividendo 6 con tre zeri, vale a dire 6000; per questa divisione si mette 8 al primo posto del numero quoziente, ossia al di sotto dello 0 del primo posto; questo perché la divisione del doppio di 60 per il

56
6000
5950000
743
8008
$\frac{56}{743}$ 8008

doppio di 1/2 7 risulta 8; questo 8 moltiplicato per 7 e sottratto dal 60 lascia 4 che si mette sullo 0 nel terzo posto; si toglie il 6 che si trova sopra lo 0 nella quarta posizione; si moltiplica di nuovo 8 per il 4 nel divisore, e il prodotto si sottrae da 40 lasciando 8; siccome la moltiplicazione di detto 8 è cambiata da posto a posto nel numero divisore, così la moltiplicazione nel numero dividendo deve essere cambiata da posto a posto. Si mette il restante 8 sullo 0 al secondo posto, e si rimuove il 4 che è stato messo sullo 0 al terzo posto; si moltiplica l'8 per il 3 e si ha 24 che si sottrae da 80; resta 56 che si mette sulla linea di frazione sul 743, e prima di essa si mette 8008; e si avrà il risultato della divisione proposta. Da ciò che è stato detto finora sulle divisioni, si può avere una piena padronanza nel dividere numeri di quattro o più figure; tuttavia tali divisioni saranno capite meglio se mostrate con alcuni numeri di quattro cifre.

La divisione di 17849 per 1973.

Se si propone di dividere 17849 per 1973, allora si scrive il divisore sotto il dividendo, cioè il 1973 al di sotto del 7849 del 17849; siccome il numero delle ultime quattro cifre del numero dividendo, cioè il 1784, è inferiore al divisore, bisogna mettere la figura del numero quoziente sotto il primo posto del numero dividendo. Per cui si mette 9 sotto il primo posto di entrambi i numeri, in quanto la moltiplicazione del 9 per il divisore rende quasi il numero dividendo, e poiché il divisore è vicino a venti centinaia, 17 è diviso per 2, e le rimanenti tre cifre del numero dividendo, ossia 849, sono trascurate; poi si moltiplica il 9 per l'1 del divisore, si sottrae dal 17 e si ha 8 che si mette al di sopra del 7; si moltiplica 9 per il 9 del divisore e si sottrae da 88; resta 7 che si mette al di sopra dell'8, e si cancella l'8. E ancora, si moltiplica il 9 per il 7 del divisore e si sottrae da 74; rimane 11 che si mette al di sopra del 74; si moltiplica il 9 per il 3 del numero divisore e si sottrae dal 119; rimane 92 che si mette sopra la linea di frazione sopra il 1973; prima di essa si mette il 9, e si avrà la proposta quantità della divisione.

La divisione di 1235689 per 4007.

Se si vuole dividere 1235689 per 4007, si scrive il numero e si mette 3 al di sotto del terzo posto dei numeri; 3 è il prescritto moltiplicatore; si moltiplica il 3 per 4 e si ha 12 che annulla il 12 che è il numero delle ultime due cifre del numero dividendo. Si moltiplica il 3 per lo 0 che è nella terza posizione del divisore e si ha 0; si sottrae 0 dal 3 del numero dividendo e si ha 3. E ancora si moltiplica il 3 per lo 0 al secondo posto del divisore e si ha 0, che si sottrae dal 35 lasciando ancora 35; 3 volte 7 fa 21 che si sottrae dal 356; resta 335 che si mette al di sopra del 356. Poiché 3358 è l'accoppiamento di 335 con il numero residuo, e questa cifra è minore del 4007, prima del 3 viene messo lo 0, vale a dire al di sotto del secondo posto dei numeri. Il 3358 si accoppia con la figura precedente, cioè con il 9, sotto il quale si mette l'8 nel numero quoziente. Si moltiplica per 4 e si sottrae dal 33 lasciando 1, che si mette sopra il 3 nel primo posto di 33, e si cancella il 33.

E 8 volte lo 0 nel terzo posto viene sottratto dal 15 lasciando 15. E di nuovo si moltiplica l'8 per lo 0 al secondo posto del numero divisore, e si sottrae da 158 lasciando 158. E 8 volte il 7 fa 56, che si sottrae dal 1589 lasciando 1533 che si mette sulla linea di frazione sul 4007, e prima di essa si mette il 308, e si avrà il quantitativo richiesto dalla divisione, come è mostrato nell'illustrazione.

Se si vuole controllare questa o qualsiasi altra divisione in maniera diversa dallo scaccia numero, si moltiplica il numero quoziente per il divisore, e si aggiunge il prodotto al resto della divisione, vale a dire a ciò che è stato messo sulla linea di frazione. In questo caso, si moltiplica il 308 per 4007, e al prodotto ottenuto si aggiunge il 1533 che è sopra la riga di frazione, e se la somma darà il numero dividendo, allora si sa che la divisione è corretta.

Capitolo 6

Inizia il sesto capitolo sulla moltiplicazione
di numeri interi con frazioni.

Se si vuole moltiplicare un numero di qualunque numero di posti più una frazione di una o più parti per un numero più una frazione di una o più parti, si scrive il numero maggiore con la sua frazione sotto il numero minore con la sua frazione, vale a dire numero sotto numero e frazione sotto frazione. Si prende il numero superiore con la sua frazione e si scrive una frazione che sia uguale al numero dato con la sua frazione. E similmente si forma la frazione del numero inferiore, e si moltiplica la frazione del numero superiore per la frazione del numero inferiore. E nella frazione prodotto si divide il numeratore per entrambi i numeri sotto la linea di frazione, dopo averla accorpata, e si otterrà il prodotto dei numeri con frazioni.

Affinché ciò sia mostrato più chiaramente con esempi numerici, dividiamo questo capitolo in otto parti.

La prima sarà sulla moltiplicazione dei numeri interi con una parte frazionaria sotto una linea di frazione.

La seconda sulla moltiplicazione dei numeri con due e tre parti frazionarie sotto una linea di frazione.

La terza sulla moltiplicazione dei numeri con due parti frazionarie sotto due linee di frazione.

La quarta sulla moltiplicazione dei numeri con due linee di frazione con numerose parti frazionarie.

La quinta sulla moltiplicazione dei numeri con tre linee di frazione.

La sesta sulla moltiplicazione delle frazioni senza gli interi.

La settima sulla moltiplicazione di numeri e frazioni la cui linea di frazione termina con un cerchio.

L'ottava sulla moltiplicazione delle parti dei numeri con frazioni.

Inizia la prima parte sulla moltiplicazione dei numeri interi
con una parte frazionaria sotto una linea di frazione.

	23
$\frac{1}{2}$	11
	67
$\frac{1}{3}$	22
$\frac{5}{6}$	256

Se si vuole moltiplicare 11 e un mezzo per 22 e un terzo, si scrive il numero maggiore sotto il minore, vale a dire 1/3 22 sotto 1/2 11, come qui mostrato. Poi si calcolano i mezzi di 1/2 11, poiché la frazione che è con 11 è una metà, e si fa così: si moltiplica l'11 per il 2 che è sotto la linea di frazione dopo 11 e si addiziona l'1 che è sopra la linea di frazione del due; si ha 23 mezzi, ovvero il doppio di 1/2 11, cioè 23. Si scrive il 23 sopra 1/2 11 come mostrato in figura. Allo stesso modo si moltiplica il 22 per il 3 che è sotto la linea di frazione davanti al 22; si ha 66, a cui si addiziona l'1 che è sopra il 3; risulta 67 terzi, che si riporta sopra 1/3 22. E questo significa triplicare 1/3 22. Si moltiplica 23 mezzi per 67 terzi; risulta 1541 sesti che si divide per i denominatori di entrambi i numeri, vale a dire per 2 e per 3. Questa divisione si fa così: si moltiplica 2 per 3; risulta 6 per il quale si divide 1541,

ottenendo 5/6 256 per la moltiplicazione richiesta, come mostrato nella figura precedente. Perciò, a chi chiede perché dalla moltiplicazione delle metà per i terzi si ottengono i sesti, rispondi che, quando si calcola una sola volta la terza parte, cioè quando si moltiplica 1 per la terza parte, si ha la terza parte, perciò, quando si moltiplica la metà di uno per la terza parte, vale a dire quando si calcola la metà della terza parte, si ottiene la sesta parte. E perciò dalla moltiplicazione delle metà per le terze parti provengono le seste parti. Ancora, seguendo un altro metodo, moltiplichiamo il doppio di 1/2 11, vale a dire 23, per il triplo di 1/3 22, vale a dire 67; vedremo che si ottiene il sestuplo del prodotto della moltiplicazione. Dalla moltiplicazione di 1/3 22 per 1/2 11 risulta il prodotto cercato. Perciò, se si moltiplica 1/3 22 per il doppio di 1/2 11, cioè per 23, risulta il doppio del prodotto cercato. Dunque, se si moltiplica il triplo di 1/3 22, cioè 67, per 23, vale a dire per il doppio di 1/2 11, risulterà senza dubbio il triplo del doppio, cioè il sestuplo del prodotto cercato. Perciò la sesta parte del prodotto della loro moltiplicazione è il prodotto cercato, come bisognava dimostrare. Ed è per questo che abbiamo moltiplicato 2 per 3, dal momento che bisognava dividere per 2 e per 3, perché il prodotto della loro moltiplicazione non va oltre il numero dieci, e così si fa con tutti i numeri il cui prodotto non supera il dieci. Per esempio, se dovessi dividere un qualche numero per 2 e per 2, dividilo per 4, dal momento che due volte 2 fa 4; e se dovessi dividere lo stesso numero per 2 e per 4, dividilo per 8, e se per 2 e per 5, dividilo per 10, e se per 3 e per 3, dividilo per 9; e se volessi dividere un certo numero per 3 e per 5, dividilo con $\frac{1\ 0}{3\ 5}$, dal momento che la moltiplicazione di 3 per 5 fa 15 che è un numero maggiore di 10. Per cui è meglio che tu lo divida con $\frac{1\ 0}{3\ 5}$ anziché per 15.

Sulla stessa.

Se si vuole moltiplicare 1/2 12 per 3/5 23, si scrive il problema come qui mostrato e si moltiplica il 12 per il 2 che è sotto la linea di frazione, e si addiziona l'1 che è sopra il 2; risulta 25 mezzi. Si moltiplica il 23 per il 5 che è sotto la linea di frazione e si addiziona il 3 che è sopra il 5; risulta 118 quinti; si moltiplicano i 25 mezzi per i 118 quinti; risultano 2950 mezzi quinti, vale a dire decimi. Per questo si divide per 2 e per 5, che sono sotto la linea di frazione, cioè per 10, ovvero si divide 2950 per 10, poiché dal doppio di 1/2 12 per il quintuplo di 3/5 23, vale a dire da 25 per 118, risulta dieci volte il prodotto di 1/2 12 per 3/5 23, e si ha esattamente 295, come mostrato nel problema. Si può trovare il prodotto della suddetta moltiplicazione in altro modo, vale a dire invece di moltiplicare 25 per 118; si divide il 25 per il 5 della frazione, che si può dividere esattamente; risulta 5 che si tiene; si divide il 118 per il 2 che è sotto la linea di frazione; tale metà è intera, risulta 59, che si moltiplica per il 5 tenuto, che era la quinta parte di 25; risulta come sopra 295 per il prodotto della suddetta moltiplicazione. Questa semplificazione è utile, in quanto risparmia la fatica di moltiplicare e di dividere; infatti è più difficile moltiplicare 25 per 118, che 5 per 59, il cui prodotto, cioè di 5 per 59, non è necessario dividere per

25

$\frac{1}{2}$ 12

118

$\frac{3}{5}$ 23

$\frac{0}{1\ 0}$ 295

nessuna parte frazionaria. Per cui, qualora si dovesse moltiplicare un numero per un numero e poi si dovesse dividere il loro prodotto per uno o più numeri per il quale, o per i quali, uno di quei numeri è divisibile integralmente, si avrà cura sempre di dividere quelli che si possono dividere integralmente, prima di moltiplicarli; poi si moltiplicheranno fra loro gli altri numeri e si divideranno per il numero o i numeri che restano dalla semplificazione, cosa che spiegheremo in seguito. Ma prima voglio spiegare come procede tale semplificazione. Dalla moltiplicazione di 25 per 118 risulta il decuplo del prodotto di 1/2 12 per 3/5 23, come abbiamo avuto per la moltiplicazione precedente, perciò dalla moltiplicazione della quinta parte di 25 per 118, risulta la quinta parte del decuplo del prodotto di 1/2 12 per 3/5 23, vale a dire il doppio del prodotto stesso: perciò se si moltiplica la quinta parte di 25, vale a dire 5, per la metà di 118, vale a dire 59, si ha il prodotto della moltiplicazione cercato.

Sulla stessa.

	41	5
$\frac{2}{3}$	13	
	173	2
$\frac{5}{7}$	24	
$\frac{1\ 5}{3\ 7}$	337	1

Ancora, se si vuole moltiplicare 2/3 13 per 5/7 24, una volta scritti i numeri come qui mostrato, si moltiplica il 13 per il 3 e si addiziona il 2 che è sopra tale 3; risulta 41 terzi. Si moltiplica il 24 per la sua frazione, cioè per il 7 e si addiziona il 5; risulta 173 settimi, che si moltiplica per 41 terzi, e risulta 7093 ventunesimi. Si divide 7093 per 3 e per 7, che sono sotto la linea di frazione così: $\frac{1\ 0}{3\ 7}$; l'intero quoziente sarà $\frac{1\ 5}{3\ 7}$ 337. Di questa moltiplicazione non si può semplificare nulla, dal momento che il 41 e il 173 non si possono dividere integralmente ne per 3 ne per 7. Se si vuole sapere attraverso la prova del nove se questa moltiplicazione è corretta oppure no, si calcola il residuo di 13 da 9, che è 4, e si moltiplica per 3 che è sotto la linea di frazione davanti al 13; si ha 12 e si addiziona il 2 che è sopra lo stesso 3, e risulta 14, del quale si calcola il residuo che è 5 e si conserva. Si vede se il residuo di 41 è il 5 conservato, e in effetti lo è, come deve essere; perciò si riporta il 5 sopra il 41, o dopo di esso. Dopo si vede se il residuo di 173 da nove è corretto; si moltiplica il residuo di 24, che è 6, per il 7 che è sotto la linea di frazione e si addiziona il 5 che è sopra il 7; si ha 47, del quale si conserva il residuo, che è 2; poiché tale deve essere il residuo di 173, e lo è, si pone il 2 sopra il 173. Si moltiplica il residuo di 41 per il residuo di 173, vale a dire il 5 per il 2; si ha 10, da cui si sottrae nove, resta 1, che è il residuo del prodotto della moltiplicazione; si riporta tale 1 sopra il prodotto della moltiplicazione, vale a dire sopra $\frac{1\ 5}{3\ 7}$ 337. Si moltiplica il residuo di 337 che è 4 per il 7 che è sotto la linea di frazione davanti al 337, e si addiziona il 5; risulta 33, il cui residuo è 6, che si moltiplica per il 3 che è sotto la stessa linea di frazione davanti al 7, e si addiziona l'1 che è sopra il 3; risulta 19, il cui residuo è 1, che si riporta sopra il 337 come residuo del prodotto della moltiplicazione; perciò la moltiplicazione è corretta. Di regola, appena si inizia a moltiplicare, si deve iniziare a fare la verifica. Così in questa moltiplicazione, appena si ottiene 41 dalla moltiplicazione di 13 per 3, addizionato il 2, si deve vedere subito, attraverso la prova, se il 41 è corretto; similmente quando si ottiene il 173, si

deve verificare se è corretto. Di nuovo, quando si moltiplica 41 per 173, bisogna vedere con la prova se il loro prodotto è corretto. E quando si ottiene il risultato, vale a dire $\frac{1\ 5}{3\ 7}$ 337, bisogna sapere similmente, in base a ciò che abbiamo dimostrato più sopra, se quella divisione risulta corretta.

Sulla stessa.

	65	2
$\frac{1}{4}$	16	
	137	4
$\frac{2}{5}$	27	
$\frac{0\ 1}{4\ 5}$	445	1

Ancora, se si vuole moltiplicare 1/4 16 per 2/5 27, una volta scritto il problema, si moltiplica il 16 per la parte sotto la linea di frazione, vale a dire per 4 e si addiziona l'1; risulta 65 quarti, che si verifica prendendo i residui così: per verificare con la prova del 7, si divide il 16 per il 7, resta 2 che si moltiplica per il 4 sotto la linea di frazione e si addiziona l'1 che è sopra il 4; risulta 9 che si divide per 7, resta 2, e tanto deve rimanere da 65, se viene diviso per 7; e tanto rimane. Perciò il residuo di 65 è 2 che si riporta sopra lo stesso 65. Poi si moltiplica il 27 per la parte sotto la linea di frazione; risulta 137 quinti che si pone sopra 2/5 27, e si vede, attraverso la prova del 7, se il 137 è corretto, come si è fatto col 65. E si trova che il residuo di 137 deve essere 4, e così è, poiché se si divide 137 per 7, resta 4. Perciò si porta il 4 sopra il 137 come residuo. Poi si moltiplica 65 per 137, risultano 8905 ventesimi. Se questa moltiplicazione è corretta, lo si sa attraverso la stessa prova del sette, così: si moltiplica il residuo riportato del 65, vale a dire il 2, per il residuo del 137 che è 4, risulta 8, che si divide per 7, resta 1. E tanto deve rimanere da 8905 se diviso per 7; e così avviene. E sappiamo che quella moltiplicazione è corretta. Poi si divide 8905 per i denominatori, cioè per il 4 e per il 5 posti sotto la linea di frazione. Si divide prima per il 5, perché 8905 si divide integralmente per 5; risulta $\frac{0\ 1}{5\ 4}$ 445 che è il prodotto della moltiplicazione richiesta. Per vedere se questa divisione è corretta, si divide il 445 per il 7, resta 4 che si moltiplica per il 4 che è al numeratore dopo il 445, e si addiziona l'1 che è sopra il 4; risulta 17 che si divide per 7, resta 3 che si moltiplica per il 5 che è sotto la linea di frazione dopo il 4; si addiziona lo zero che è sopra il 5; risulta 15 che si divide per 7, resta 1; dal momento che questo 1 è il residuo di 8905, capiamo che la divisione assegnata è corretta. Poiché il 5 che è sotto la linea di frazione dopo il 4, dal momento ha sopra uno 0, non significa nulla, la moltiplicazione dà come risultato 1/4 445. Abbiamo posto il 5 sotto la linea di frazione, e trovato il residuo. In altro modo si può trovare lo stesso prodotto, dividendo il 65 trovato per il 5 che è sotto la linea di frazione; risulta 13 che si moltiplica per 137, e si divide per il 4 dell'altra linea di frazione; il quoziente sarà 1/4 445, come più sopra è stato trovato. Infatti, quando si deve dividere qualche numero per 4 e per 5, cioè con $\frac{1\ 0}{4\ 5}$, se il 5 è tra i suoi divisori, abituiamoci a dividere tale numero prima per 5 che per 4, perché il quoziente di tale divisione è intero, come abbiamo fatto per 8905. E se lo stesso numero si divide integralmente per 4, abituiamoci a dividerlo prima per 4 che per 5. E se quel numero non si può dividere ne per 4 ne per 5, abituiamoci a dividerlo con $\frac{1\ 0}{2\ 10}$, perché quattro per cinque dà 20, la cui composizione è $\frac{1\ 0}{2\ 10}$. E facciamo ciò perché è più elegante dire $\frac{1\ 0}{2\ 10}$ anziché $\frac{1\ 0}{4\ 5}$,

sebbene sia lo stesso. Similmente, qualora si dovesse dividere per 3 e per 4, cioè con $\frac{1\ 0}{3\ 4}$, un numero che non sia divisibile integralmente per alcuno di essi, si divide con $\frac{1\ 0}{2\ 6}$ che è più elegante. Ancora, quando si deve dividere per 4 e per 4, cioè con $\frac{1\ 0}{4\ 4}$, allora si divide con $\frac{1\ 0}{2\ 8}$. E qualora dovessi dividere per 3 e per 6, cioè con $\frac{1\ 0}{3\ 6}$, dividi con $\frac{1\ 0}{2\ 9}$, dal momento che la moltiplicazione di 2 per 9 dà lo stesso risultato di quella di 3 per 6. E se dovessi dividere per 4 e per 6, cioè con $\frac{1\ 0}{4\ 6}$, dividi con $\frac{1\ 0}{3\ 8}$. E se dovessi dividere con $\frac{1\ 0}{5\ 6}$, dividi con $\frac{1\ 0}{3\ 10}$. E se dovessi dividere con $\frac{1\ 0}{5\ 8}$, dividi con $\frac{1\ 0}{4\ 10}$. E se dovessi dividere con $\frac{1\ 0}{6\ 6}$, dividi con $\frac{1\ 0}{4\ 9}$, perché entrambe le frazioni sono composizioni di 36. Abbiamo scelto numeri più estremi, fino a dieci, nella composizione, perché è più elegante. Ma se si vuole dividere un numero per alcuni altri numeri fino a dieci, oltre a quelli che abbiamo insegnato a raggruppare, che non possono essere raggruppati diversamente, allora si dividono per essi stessi. Così, se si deve dividere per 5 e per 7, si divide con $\frac{1\ 0}{5\ 7}$, e così si deve intendere per gli altri.

	147	4
$\frac{3}{8}$	18	
	220	0
$\frac{4}{9}$	24	
$\frac{4\ 1}{8\ 9}$	449	0

Ancora, se si vuole moltiplicare 3/8 18 per 4/9 24, una volta scritto il problema, si moltiplica il 18 per la parte sotto la sua linea di frazione, cioè per 8, e si addiziona il 3; risulta 147. Poi si moltiplica il 24 per il 9 e si addiziona il 4; risulta 220. Si moltiplica questo per 147 e si divide per le parti sotto la linea di frazione; risulta $\frac{4\ 1}{8\ 9}$ 449, il cui residuo di 11 è 0. Se si vuole sapere quanta parte di un intero sia $\frac{4\ 1}{8\ 9}$, si moltiplica l'1 che è sopra il 9 per l'8 e si addiziona il 4; risulta 12 che si tiene come numeratore; si moltiplica il 9 per l'8, che è sotto la linea di frazione; risulta 72 come denominatore che si divide per il 12 tenuto; risulta 6, per cui si dice 1/6, come 12 di 72 parti. Perciò $\frac{4\ 1}{8\ 9}$ è 1/6 del tutto. Questo è elegante, poiché dalla moltiplicazione di 8 per 9 si hanno 72 parti, di cui si devono prendere un nono e quattro ottavi di un nono, cioè 8 e 4, vale a dire 12 parti, come si ottiene dalla moltiplicazione dell'1 che è sopra il 9 per l'8, una volta addizionato il 4 che è sopra l'8. Quindi $\frac{4\ 1}{8\ 9}$ è 12/72. Ma il rapporto di 12 a 72 è come il rapporto della dodicesima parte di 12 alla dodicesima parte di 72, cioè di 1 a 6. Perché, come si trova in Euclide, come l'intero sta all'intero, così la parte sta alla parte; dunque il prodotto della moltiplicazione assegnata è 1/6 449.

In altro modo possiamo trovare questo stesso risultato semplificando, ma si deve moltiplicare 147 per 220 e dopo dividere per 8 e per 9; si moltiplica la terza parte di 147, che è 49, per la quarta parte di 220, cioè per 55, e si divide il prodotto per la terza parte di 9, cioè per 3, e per la quarta parte di 8, cioè per 2. Perciò si divide il prodotto per 6; risulta 1/6 449 come più sopra è stato trovato. E si noti che, quando il numeratore ha qualche fattore in comune con il denominatore, vale a dire il numero che è sopra la linea di frazione con il numero che è sotto la linea di frazione, allora devono essere semplificati dividendoli per il numero maggiore comune a entrambi. Per esempio, abbiamo 6/9; il 6 ha un fattore in comune con il 9, che è il tre.

Allora si dividono entrambi per 3, e ciò che risulta dalla divisione del numero superiore, vale a dire 2, si pone sopra la linea di frazione, e ciò che risulta dalla divisione dell'inferiore si pone sotto la stessa. E si ha 2/3 in luogo di 6/9. Ancora, 5/10 ha il cinque come più grande fattore comune fra numeratore e denominatore. Per questo se si dividono entrambi i numeri per 5, vale a dire il 5 e il 10, risulta 1/2 per la semplificazione di 5/10, e così si deve intendere in casi simili. C'è un metodo per trovare il massimo fattore comune che hanno tra loro due numeri; si divide il maggiore per il minore e se da tale divisione non avanzerà nulla, allora il numero trovato sarà il loro massimo fattore comune, come in 12/72 è 6. E se da tale divisione avanzerà un resto, si tiene come primo resto per il quale dividere il numero minore; se da tale divisione non avanzerà nulla, allora il primo resto sarà il massimo fattore comune, come in 10/22, il cui massimo fattore comune è 2, perché una volta diviso il 22 per il 10 resta 2, per il quale il 10 si divide integralmente. E se dalla divisione del numero minore per il primo resto avanzerà qualcosa, si tiene come secondo resto; se per esso il numero minore si divide integralmente, allora il secondo resto sarà il massimo fattore comune, come in 12/20, il cui massimo fattore comune è 4, dal momento che, una volta diviso 20 per 12, resta 8, per cui si divide il 12, con resto 4, per il quale il 12 si divide integralmente; e se dalla divisione del numero maggiore avanzerà ancora qualcosa, sarà il terzo resto, per cui dividere il numero minore; e sempre così, finché nel numero maggiore non risulti un resto per il quale il minore si divida integralmente o finché non risulti un resto per il quale il maggiore si divida integralmente; quel resto sarà il massimo fattore comune, come si afferma in Euclide con chiare dimostrazioni.

Qui finisce la prima parte del sesto capitolo.
Qui inizia la seconda parte sulla moltiplicazione dei numeri
con più parti frazionarie sotto una linea di frazione.

Se si vuole moltiplicare 13 e tre ottavi più la metà di un ottavo, che si scrive così: $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 13, per 24 e due noni più tre quarti di un nono, che si scrive così: $\frac{3\ 2}{4\ 9}$ 24, si scrive il problema come mostrato in figura. Si moltiplica il 13 per l'8, e si addiziona il 3; risulta 107 ottavi che si moltiplica per il 2 che è sotto la linea di frazione dopo l'8 e si addiziona l'1 che è sopra il 2 stesso; risulta 215 sedicesimi, dal momento che 2 e 8, che sono sotto la linea di frazione, moltiplicati fra loro, danno 16; si pone il 215 sopra $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 13. Similmente si moltiplica il 24 per le sue frazioni, vale a dire per 9 e si addiziona il 2 che è sopra il 9; risulta 218 noni, che si moltiplica per il 4 che è sotto la linea di frazione dopo il 9 e si addiziona il 3 che è sopra il 4; risulta 875 trentaseiesimi che si pone sopra $\frac{3\ 2}{4\ 9}$ 24; si moltiplica 215 per 875 e si divide per i numeri che sono sotto entrambe le linee di frazione, cioè con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 4\ 8\ 9}$, o con $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 8\ 9}$ che è più elegante; il quoziente è $\frac{5\ 3\ 5}{8\ 8\ 9}$ 326. E così potrai moltiplicare qualunque numero con due parti frazionarie sotto una sola linea di frazione per qualunque numero con due parti frazionarie

	215	6
$\frac{1\ 3}{2\ 8}$	13	
	875	6
$\frac{3\ 2}{4\ 9}$	24	
$\frac{5\ 3\ 5}{8\ 8\ 9}$	326	3

sotto un'altra. Ancora, se si vuole moltiplicare 14 e tre undicesimi più tre ottavi di un undicesimo e mezzo ottavo di un undicesimo, cioè $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14, per 25 e quattro tredicesimi e due noni di un tredicesimo e un terzo di un nono di un tredicesimo, cioè $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ 25, si scrive il problema come mostrato; si moltiplica il 14 per le parti sotto la linea di frazione, cioè per 11, e si addiziona il 3; poi si moltiplica per 8 e si addiziona il 3 che è sopra l'8; poi si moltiplica per 2 e si addiziona l'1; risulta 2519 centosettantaseiesimi, che si pone sopra il $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14. Similmente si moltiplica il 25 per le parti sotto la sua linea di frazione; risulta 8890 trecentocinquantunesimi che si pone sopra $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ 25; e si moltiplica il 2519 per l'8890, risulterà 22393910 che si divide per le restanti parti che sono sotto entrambe le linee di frazione, vale a dire con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 13}$; il quoziente risulta $\frac{2\ 5\ 4\ 6}{3\ 8\ 9\ 13}$ 362; poiché cancellando 1/2 da 1/6, rimane 1/3. Se si vuole verificare questa moltiplicazione attraverso la prova del 7, si prende il residuo di $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14, che si calcola così: si moltiplica il residuo di 14 che è 0 per il residuo di 11 che è 4 e si addiziona il 3 che è sopra l'11; risulta 3 che si moltiplica per il residuo di 8 che è 1 e si addiziona il 3 che è sopra l'8; risulta 6 che si moltiplica per il 2 che è sotto la linea di frazione e si addiziona l'1 che è sopra il 2; risulta 13 il cui residuo, che è 6, è il residuo di $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14. Allo stesso modo e nello stesso ordine si calcola il residuo di $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ 25, e si trova che è 0, che si moltiplica per 6, che è il residuo di $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14, e si ha 0, che è il residuo del prodotto della moltiplicazione. Se il residuo di $\frac{2\ 6\ 6\ 5\ 6}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ 362 è 0, allora la moltiplicazione sarà corretta; sappiamo che il residuo di 14 con le sue frazioni, vale a dire 6, è il residuo del numero, cioè di 2549, e il residuo di 25 con le sue frazionai, vale a dire 0, è il residuo di 8890; per questo il residuo che risulta moltiplicando il 6 per 0, vale a dire 0, è il residuo del prodotto di 2519 per 8890.

	2519	6
$\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$	14	
	8890	0
$\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$	25	
$\frac{2\ 5\ 4\ 6}{3\ 8\ 9\ 13}$	362	0

Qui inizia la parte terza.

Se si vuole moltiplicare 15 e un terzo e un quarto di un intero, che si scrive così con due linee di frazione separate, 1/4 1/3 15, per 26 e un quinto e un sesto che si scrive così, 1/6 1/5 26, si scrive il problema come mostrato, e si moltiplica il 15 per il 3 che è sotto la prima linea di frazione, e si addiziona l'1 che è sopra il 3; risulta 46 terzi che si moltiplica per il 4 che è sotto l'altra linea di frazione; risulta 184 dodicesimi, a cui si addiziona il prodotto della moltiplicazione dell'1 che è sopra il 4 per il 3, dal momento che un quarto equivale a tre dodicesimi; risulta 187 dodicesimi che si pone sopra 1/3 1/4 15. Similmente si moltiplica il 26 per le parti delle sue frazioni, cioè per 5, e si addiziona l'1 che è sopra il 5; risulta 791 trentesimi che si pone sopra 1/6 1/5 26; si moltiplica il 187 per il 791; risulta 147917, che si divide per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione, vale a dire con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 5\ 6}$

	187
$\frac{1\ 1}{4\ 3}$	15
	791
$\frac{1\ 1}{6\ 5}$	26
$\frac{1\ 7\ 8}{4\ 9\ 10}$	410

che accorpati diventano $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 9\ 10}$; il quoziente sarà $\frac{1\ 7\ 8}{4\ 9\ 10}$ 410, come mostrato.

Ancora, se si vuole moltiplicare 2/9 3/5 16 per 2/11 5/8 27, una volta scritto il problema, si moltiplica il 16 per il 5 e si addiziona il 3; si moltiplica tutto per il 9 e si addiziona il prodotto del 2 che è sopra il 9 per il 5; risulta 757 che si pone sopra 2/9 3/5 16. Poi si moltiplica il 27 per le parti sotto le sue frazioni; risulta 2442 per il quale si moltiplica il 757 e si divide il prodotto per tutte le parti delle frazioni, vale a dire con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{5\ 8\ 9\ 11}$ e, una volta aggregate le parti, risulta $\frac{3\ 8\ 4\ 8}{4\ 9\ 10\ 11}$ 467. Se si vuole verificare questa moltiplicazione con la prova del 7, si calcola il residuo di 2/9 3/15 16, così: si moltiplica il residuo di 16, che è 2, per il 5 sotto la linea di frazione e si addiziona il 3 che è sopra il 5; risulta 13, il cui residuo, che è 6, si moltiplica per il residuo di 9, che è 2; risulta 12 a cui si addiziona la 8moltiplicazione del 2 che è sopra il 9 per il 5; risulta 22, il cui residuo, che è 1, è il residuo di 2/9 3/5 16. E tale deve essere il residuo di 757, e così è. Allo stesso modo si calcola il residuo di 2/11 5/8 27; e si trova che tale residuo è 4, che è il residuo di 2447. Perciò si moltiplica l'1 per il 4; risulta 4, che è il residuo del prodotto, vale a dire di $\frac{3\ 8\ 4\ 8}{4\ 9\ 10\ 11}$ 467. E se si vuole ridurre $\frac{3\ 8\ 4\ 8}{4\ 9\ 10\ 11}$, si moltiplica l'11 per 10 e si moltiplica il loro prodotto per 9 e tutto questo per 4; risulta 3960 che è il denominatore, che si pone sotto una linea di frazione; si moltiplica l'8 che è sotto l'11 per il 10 e si addiziona il 4 che è sopra il 10; si moltiplica tutto per il 9 e si addiziona l'8 che è sopra il 9; si moltiplica il risultato per il 4 e si addiziona il 3 che è sopra il 4; risulta 3059 che è il numeratore, che posto sopra la linea di frazione dà 3059/3960 per la riduzione richiesta.

Ancora, se si vuole moltiplicare 1/9 1/8 17 per 1/17 1/3 28, si moltiplicano gli interi per le parti sotto le loro frazioni nell'ordine descritto sopra; E si ottiene, per il numero superiore 1241, e per l'inferiore 1448; questi numeri si moltiplicano tra loro e si divide il prodotto per tutte le loro parti, cioè con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 17}$. E poiché ci sono fattori comuni tra numeratore e denominatore, cioè tra i numeri moltiplicati e i numeri che sono sotto la linea di frazione, si deve usare il metodo di semplificazione descritto sopra, vale a dire si prende 1/17 di 1241, vale a dire 73, in luogo di uno dei numeri da moltiplicare, e si cancella il 17 che è sotto la linea di frazione. Poi si prende 1/8 di 1448, vale a dire 181, in luogo dell'altro, e si cancella il 18 da sotto la linea di frazione. Quindi, si moltiplica 73 per 181 e si divide il prodotto per i restanti numeri che sono sotto la linea di frazione, vale a dire con $\frac{1\ 0}{3\ 9}$, risulterà $\frac{1\ 3}{3\ 9}$ 489 per la moltiplicazione richiesta. Si prende il residuo di questo prodotto dai residui di 73 e di 181, dal momento che il prodotto viene diviso. Per 3/9 si dice un terzo; per $\frac{1\ 3}{3\ 9}$ si dice un terzo e un terzo di un nono. Ancora, se si ha in una frazione questo $\frac{2\ 3\ 2\ 5}{4\ 6\ 8\ 10}$ si dirà così: per 5/10 si dice 1/2; per 2/8 si dice un quarto di un decimo; per 3/9 si dice un mezzo di un ottavo di un decimo; e per 2/4 si dice un mezzo di un sesto di un ottavo di un decimo; e questo perché i numeri superiori hanno fattori in comune con gli inferiori. Bisogna notare che molte parti che sono

sotto diverse frazioni possono essere ridotte ad un'unica frazione, vale a dire alle parti di un solo numero, come sarà dimostrato. Ma qui è necessario mostrare in che modo si addizionano due frazioni che sono sotto due linee; si moltiplica il numero che si trova sotto la prima linea di frazione per il numero che si trova sotto la seconda, e si pone il risultato sotto una linea di frazione; poi si moltiplica il numero che è sopra la prima linea di frazione per il numero che è sotto la seconda; si moltiplica il numero che è sopra la seconda per il numero che è sotto la prima; si addizionano questi due prodotti, e si pongono i risultati sopra la linea di frazione ottenendo ciò che si cercava. Per esempio, vogliamo addizionare 1/2 e 2/5; si moltiplica il 2 per il 5 che è sotto la linea di frazione; risulta 10, che si pone sotto una linea di frazione; si moltiplica l'1 che è sopra il 2 per il 5, e il 2 che è sopra il 5 per il 2 che è sotto la linea di frazione; risultano 5 e 4, cioè 9; si hanno 9/10 in luogo di $\frac{2}{5}\ \frac{1}{2}$. In altro modo, si calcolano i decimi di un intero, cioè 10 decimi; perciò, per 1/2 si hanno 5/10, e per 2/5 si hanno 4/10; così per 1/2 più 2/5 si avranno 9/10, come abbiamo detto. Sebbene attraverso questi due metodi, due frazioni con due linee di frazione si riconducono ad una frazione, tuttavia, vedremo come procedere con le frazioni che hanno sotto le linee numeri con fattori in comune. Così, se si vuole ridurre ad una sola frazione $\frac{2}{9}\ \frac{1}{3}$, poiché il 3 e il 9, che sono sotto le linee di frazione, hanno tra loro un fattore in comune, che è il numero 3, si divide uno di tali numeri, il 3 o il 9, per il loro fattore comune 3, e si moltiplica il risultato per l'altro numero e risulterà 9 come denominatore. Infatti, moltiplicando la terza parte di 3, vale a dire 1 per 9, o moltiplicando la terza parte di 9 per 3, certamente da qualsiasi delle suddette moltiplicazioni risulta 9; si pone questo sotto una linea di frazione e si moltiplica l'1 che è sopra il 3 per la terza parte di 9; risulta 3, che si tiene in mano; si moltiplica il 2 che è sopra il 9 per la terza parte di 3, cioè per 1; risulta 2 che si addiziona con il 3 tenuto; risulta 5 che si pone sopra la linea di frazione sotto cui è posto il 9, e si ottiene 5/9 per $\frac{2}{9}\ \frac{1}{3}$. Ancora, se si vuole addizionare $\frac{5}{6}\ \frac{3}{4}$, poiché 2 è fattore comune di 4 e 6, si moltiplica la metà di 4 per 6 o la metà di 6 per 4, o si calcola la metà della moltiplicazione di 4 per 6; si ha 12, che si pone sotto una linea di frazione; si moltiplica il 3 che è sopra il 4 per la metà di 6, e il 5 che è sopra il 6, per la metà di 4; si hanno 9 e 10 che si addizionano; risulta 19; Questo 19 andrebbe posto sopra il 12 che è sotto la linea di frazione, se fosse minore di 12; poiché è maggiore, si divide il 19 per 12; risulta 7/12 1 per la somma di $\frac{5}{6}\ \frac{3}{4}$. Si noti che, quando sotto due linee di frazione si pongono numeri che hanno un fattore in comune, o dalla cui moltiplicazione non risulta un numero maggiore di dieci, allora, per il suddetto insegnamento, si devono ridurre tali frazioni ad una sola frazione, ed averla in luogo di quelle due frazioni, come vedremo nel seguito. Ma prima porrò, nelle tabelle sottostanti, coppie di frazioni da unire, con davanti ad esse il risultato della loro unione. Inizierò da $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ che è 1; segue $\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$ che è 5/6, e poi le altre che sono scritte nelle seguenti tabelle.

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$	

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{5}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		1

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{9}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{12}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{12}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{20}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	1

$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	1
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{7}{10}$	1
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$		1

$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1\,3}{2\,9}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1\,5}{2\,9}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1\,6}{2\,9}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2\,4}{3\,5}$	
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2\,0}{3\,5}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2\,2}{3\,5}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2\,3}{3\,5}$	1
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	

$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{9}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$	
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{20}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{13}{20}$	1
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1\,2}{3\,8}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1\,4}{3\,8}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1\,6}{3\,8}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{24}$	1
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1\,2}{2\,9}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1\,3}{2\,9}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1\,5}{2\,9}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1\,6}{2\,9}$	

$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1\,2}{4\,10}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1\,4}{4\,10}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1\,8}{4\,10}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1\,0}{4\,10}$	1
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	

$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{9}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	

$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	
$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1\,8}{2\,9}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1\,0}{2\,9}$	1
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1\,1}{3\,5}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1\,2}{3\,5}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1\,4}{3\,5}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1\,0}{3\,5}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2\,7}{3\,8}$	

$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1	
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3\,4}{4\,10}$	
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3\,6}{4\,10}$	
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3\,0}{4\,10}$	1
$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{3\,2}{4\,10}$	1
$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	1

$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{20}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{19}{20}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{20}$	1

$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	1
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	
$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2\,1}{3\,8}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2\,3}{3\,8}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{2\,5}{3\,8}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1\,8}{2\,9}$	
$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1\,0}{2\,9}$	1
$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1\,2}{2\,9}$	1

$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1\,7}{4\,10}$	
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1\,9}{4\,10}$	
$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1\,3}{4\,10}$	1
$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1\,5}{4\,10}$	1
$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	1
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3\,9}{4\,10}$	

Pertanto, conosciute le suddette addizioni delle frazioni, se si vuole moltiplicare 1/3 1/2 11 per 1/5 1/2 22, si moltiplica 5/6 11 per 7/10 22. Similmente, se si vuole moltiplicare 5/6 3/4 12 per 1/9 3/2 23, si addiziona prima 3/4 a 5/6; risulta 7/12 1, che si addiziona al 12; risulta $\frac{1\ 3}{2\ 6}$ 13; poi si addiziona 2/3 a 1/9; si ha 7/9; quindi si moltiplica $\frac{1\ 3}{2\ 6}$ 13 per 7/9 23, e così devi intendere in casi simili.

Qui inizia la parte quarta.

$$\begin{array}{ccc} & 12911 & 3 \\ \frac{1\ 2}{5\ 9} & \frac{1\ 5}{2\ 8} & 17 \\ & 63091 & 0 \\ \frac{2\ 1}{5\ 5} & \frac{3\ 4}{8\ 11} & 28 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1\ 6\ 4\ 1\ 2\ 7\ 2}{2\ 8\ 9\ 10\ 10\ 10\ 11}} & 514 \end{array}$$

Se si vuole moltiplicare 17 e cinque ottavi e mezzo ottavo e due noni e un quinto di un nono per 28 e quattro undicesimi e tre ottavi di un undicesimo e un quinto e due quinti di un quinto, si scrivono i numeri come si vede nel margine; si moltiplica 17 per la sua prima parte frazionaria, vale a dire per 8 e si addiziona 5; si moltiplica tutto per 2 e si addiziona 1; risulta 283 che si moltiplica per i numeri che sono sotto la seconda linea di frazione, cioè per 9, e tutto questo per 5; risulta 12735; ora si fa la prova del sette per vedere se la moltiplicazione è corretta. Il residuo di 17 è 3, che si moltiplica per il residuo di 8, che è 1, e si addiziona il 5 che è sopra l'8, il cui residuo, cioè 1, si moltiplica per 2 e si addiziona l'1 che è sopra il 2; risulta 3 che è il residuo di 283, che si moltiplica per il residuo di 9; risulta 6 che si moltiplica per il 5 che è sotto la linea di frazione; risulta 30, il cui residuo, cioè 2, è il residuo del numero trovato, cioè di 12735. Poi si moltiplica il 2 che è sopra il 9 per il 5, e si addiziona l'1 che è sopra il 5; si moltiplica per 2; e si moltiplica per 8 che è sotto la prima linea di frazione; risulta 176, di cui si calcola il residuo così: si moltiplica il 2 che è sopra il 9 per 5 e si addiziona l'1; risulta 11, il cui residuo che è 4, si moltiplica per 2; risulta 8, il cui residuo che è 1, si moltiplica per il residuo di 8; risulta 1, e tanto deve essere il residuo di 176; e poiché è così, sappiamo che 176 è un risultato corretto. Questo si addiziona a 12735; risulta 12911, il cui residuo è 3, che risulta dall'addizione dei residui dei numeri addizionati; perciò si pone sopra il 17. Si continua a moltiplicare nello stesso ordine il 28 per le sue frazioni, e risulta 63091; questo si pone sopra il 28, e anche il suo residuo, che è 0; si moltiplica 12911 per 63091; si divide per tutti i numeri che sono sotto le 4 linee di frazione e, sistemate le parti, si avrà il prodotto cercato, come mostrato nel problema; il residuo è quello che risulta dalla moltiplicazione dei residui tenuti per le stesse.

$$\begin{array}{ccc} & 1183290 & 9 \\ \frac{1\ 5\ 1}{2\ 6\ 8} & \frac{2\ 2\ 3}{7\ 9\ 10} & 19 \\ & 1070319 & 8 \\ \frac{1\ 2\ 1}{3\ 5\ 7} & \frac{5\ 3\ 3}{6\ 8\ 9} & 23 \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 2\ 1\ 5\ 6}{2\ 6\ 7\ 7\ 8\ 8\ 9\ 9\ 10}} & 461 \end{array}$$

Ancora, se si vuole moltiplicare $\frac{1\ 5\ 1}{2\ 6\ 8}$ $\frac{2\ 2\ 3}{7\ 8\ 10}$ 19 per $\frac{1\ 2\ 1}{3\ 5\ 7}$ $\frac{5\ 3\ 3}{6\ 8\ 9}$ 23, si moltiplica 19 per le sue frazioni, vale a dire per 10, e si addiziona il 3 che è sopra il 10; si moltiplica per 9 e addiziona il 2 che è sopra il 9; si moltiplica per il 7 e si addiziona il 2 che è sopra il 7; risulta 12175 che si moltiplica per l'8, per il 6, e per il 2 che sono sotto la seconda linea di frazione; risulta 1168800, il cui residuo di 11 è 6; si tiene il 6 e si moltiplica l'1 che è sopra l'8 per il 6, e si addiziona il 5 che è sopra il 6; si moltiplica per il 2 e si addiziona l'1 che è sopra il 2; risulta 23 che si moltiplica per il 7, per il 9, e per il 10, che sono sotto la prima linea di frazione; risulta 14490, il cui residuo per 11 è 3; si addiziona il 14490 con il 1168800 tenuto; risulta

1183290, il cui residuo è 9, che si ottiene dall'addizione di 6 e 3, che sono i residui di detti numeri. Perciò, si moltiplica 1183290 per 1070319, che risulta dalla moltiplicazione di 23 per le sue frazioni, e il suo residuo da 11 è 4; si divide il risultato per i numeri che sono sotto tutte e quattro le linee di frazione. Se si vogliono semplificare i fattori comuni che ci sono tra il moltiplicando e il dividendo, si prende 1/10 di 1183290, e della decima parte si calcola la terza parte; risulta 39443. Similmente, si divide 1064809 per 3; risulta 354953, che si moltiplica per 39443 e si divide il prodotto per tutte le suddette frazioni, sottratte da $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 3\ 10}$, cioè $\frac{1\ 0}{9\ 10}$; e sistemate le frazioni nell'ordine suddetto, si avrà il prodotto cercato, come si vede nel problema. E se si vuole verificare quest'operazione, si moltiplica il residuo di 39443 per il residuo di 354953, e si avrà il residuo del prodotto cercato.

Qui inizia la parte quinta.

Se si vuole moltiplicare 21 e 1/3 e 1/4 e 1/5 per 32 e 3/7 e 2/9 e 1/8, si scrivono i numeri come si vede a margine; si moltiplica 21 per 3 e si addiziona l'1 che è sopra il 3; risulta 64, che si moltiplica per il 4 e per il 5 che sono sotto la linea di frazione; cioè, si moltiplica 64 per 20; risulta 1280 sessantesimi; l'1 che è sopra il 4, che è un quarto, si moltiplica per il 5 che è sotto la terza linea di frazione e poi per il 3 che è sotto la prima; risulta 15 sessantesimi. Ancora, l'1 che è sopra il 5, che è un quinto, si moltiplica per il 4 che è sotto la seconda linea di frazione e per il 3 che è sotto la prima; risulta 12 sessantesimi; si addiziona 1280 a 15 e a 12 sessantesimi; risulta 1307 sessantesimi; e tanti sessantesimi ci sono in $\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ 21; fatta la prova per 11, il residuo è 9, che si ottiene moltiplicando i numeri nell'ordine. Similmente si calcola la frazione di $\frac{1}{8}\ \frac{2}{9}\ \frac{3}{7}$ 32; vale a dire, si moltiplica 32 per 7 e si addiziona il 3 che sta sopra il 7; si moltiplica per 9 e per 8; risulta 16844 cinquantaquattresimi. Si moltiplica il 2 che sta sopra il 9 per l'8 e per il 7; risulta 142 cinquantaquattresimi. Poi si moltiplica l'1 che è sopra l'8 per il 9; risulta 9 settantaduesimi che si moltiplica per 7; risulta 63 cinquantaquattresimi, che si addiziona a 112 cinquantaquattresimi e a 16341; risulta 16519 cinquantaquattresimi, la cui prova per 11 dà 8 come residuo; poi si moltiplica 1307 per 16519 e si divide il risultato in seicentocinquantaquattresimi, cioè per tutti i numeri che sono sotto le sei linee di frazione, vale a dire con $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9}$, cioè, sistemando, con $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 7\ 8\ 9\ 10}$; e il risultato della suddetta moltiplicazione è $\frac{5\ 3\ 7\ 5\ 9}{6\ 7\ 8\ 9\ 10}$ 713, come mostrato. Si ricordi che in simili operazioni, giammai devi porre sotto le linee di frazione, uno accanto all'altro, numeri che hanno tra loro fattori in comune; e se sono stati proposti da qualcuno, addizionali, vale a dire riducili in una sola linea di frazione, o in due, in base alla dottrina che hai appreso e in base agli schemi delle tabelle scritte sopra. Per una migliore comprensione, ti propongo alcune semplificazioni delle frazioni; così, se si vuole semplificare $\frac{1}{6}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, di $\frac{1}{6}\ \frac{1}{3}$ si prende $\frac{1}{2}$, e di $\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$ si prende $\frac{3}{4}$; e per $\frac{1}{6}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ si ha $\frac{3}{4}$. Si ottiene $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{10}\ \frac{1}{6}\ \frac{2}{5}$,

	1307		9
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	21
	16519		8
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{7}$	32
$\frac{5\ 3\ 7\ 5\ 9}{6\ 7\ 8\ 9\ 10}$	713		

poiché $\frac{1}{10}\ \frac{2}{5}$ è $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$ è $\frac{2}{3}$. Ancora, per $\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$ si ha 7/8; per $\frac{1}{9}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$ si ha 7/9; per $\frac{1}{8}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}$ si ha $\frac{3}{8}\ \frac{1}{5}$; si ha $\frac{1}{10}\ \frac{4}{9}$ per $\frac{1}{10}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{8}$; si ha $\frac{2}{3}\ \frac{1}{6}$ per $\frac{1}{8}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{4}$; per $\frac{3}{8}\ \frac{1}{6}$ si ha 13/24, cioè $\frac{1\ 4}{3\ 8}$; per $\frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{6}$, si addiziona prima 1/6 a 1/9, si ha 5/18; poi si addiziona 5/18 a 1/8, cioè, si moltiplica metà di 8 per 18, o metà di 18 per 8, o si prende metà del prodotto di 8 per 18; risulta 72, che si conserva sotto una linea di frazione come denominatore. Poi, per avere il numeratore, si moltiplica l'1 che è sopra l'8, per la metà di 18 e il 5 che è sopra il 18 per la metà di 8; risultano 9 e 20, cioè 29, come numeratore. Si pone questo sopra il 72 e si ottiene 29/72 per $\frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{6}$. Il denominatore, che molti chiamano "colonna" si può ottenere in maniera diversa; esso è il numero più piccolo che si può dividere integralmente per 6, per 8 e per 9, vale a dire 72; di questo si prendono 1/6, 1/8 e 1/9, cioè 12, 9 e 8, la cui somma dà 29 per il numeratore. E se si vuole separare 29/72 in parti con fattori di 72, si divide 29 usando la regola di 72; risulterà $\frac{5\ 3}{8\ 9}$, quale frazione in luogo di $\frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{6}$.

Ancora, se si vuole sistemare $\frac{1}{10}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{6}$, si trova il minimo comune multiplo di 6, 8 e 10, cioè il numero più piccolo che può essere diviso integralmente per ciascuno di essi, che è 120; questo si pone sotto una linea di frazione e si prendono 1/10, 1/8 e 1/6 di 120, cioè 12, 15 e 20, che addizionati danno 47, che si pone sopra la linea di frazione, così, 47/120; e se si vuole separare tale frazione in parti con fattori di 120, si divide il 47 usando la regola di 120; risulta $\frac{1\ 5\ 3}{2\ 6\ 10}$, quale frazione in luogo di $\frac{1}{10}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{6}$. Pertanto, affida tutte queste cose tenacemente alla memoria, e ritorniamo all'oggetto della nostra discussione.

Sulla moltiplicazione dei numeri interi con tre frazioni con due parti.

903309	0
$\frac{2\ 1}{5\ 5}\ \frac{1\ 2}{8\ 9}\ \frac{2\ 2}{3\ 7}$	23
2923156	5
$\frac{1\ 5}{2\ 17}\ \frac{2\ 3}{5\ 10}\ \frac{1\ 5}{4\ 13}$	32
$\frac{1\ 0\ 2\ 3\ 1\ 1\ 1\ 8\ 3}{2\ 7\ 9\ 10\ 10\ 10\ 10\ 13\ 17}$	790

Se si vuole moltiplicare 23 e due settimi e due terzi di un settimo, e due noni e un ottavo di un nono, e un quinto e due quinti di un quinto, per 32 e cinque tredicesimi e un quarto di un tredicesimo, e tre decimi e due quinti di un decimo, e cinque diciassettesimi e un mezzo di diciassettesimo, si scrivono i numeri come si vede in margine e si moltiplica 23 per la sua prima frazione, vale a dire per 7 e si addiziona il 2; si moltiplica per il 3 e si addiziona il 2 che è sopra il 3; risulta 491 che si moltiplica per 9, per 8, per 5 e per 5, che sono sotto le due restanti linee di frazione; risulta 883800, il cui residuo della prova dell'11 è 5. Poi si moltiplica il 2 che sta sopra il 9 per l'8 che sta sotto la stessa linea di frazione e si addiziona l'1 che è sopra l'8; risulta 17 che si moltiplica per 5 e per 5 che stanno sotto la terza linea di frazione; risulta 425, che si moltiplica per 3 e per 7 che stanno sotto la prima linea di frazione; risulta 8925, il cui residuo è 4. Dopo di ciò, si moltiplica l'1, che è sopra il 5, per il 5 che sta sotto l'altro, e si addiziona il 2; risulta 7, che si moltiplica per 8, per 9, per 7 e per 7 che stanno sotto la seconda e la prima linea di frazione; risulta 10584, il cui residuo è 2. Si addizionano i tre residui

calcolati, vale a dire 5, 4 e 2; risulta 11, il cui residuo, che è 0, si conserva; poi si sommano i tre numeri calcolati; risulta 903309, il cui residuo è 0, come quello conservato, e si trova così: si divide prima il 90, vale a dire il numero formato dalle ultime due cifre, per 11, resta 2, che, unito con il 3 che è al quarto posto dà 23, che diviso per 11 dà come resto 1; questo, unito con il 3 del terzo posto, dà 13, che diviso per 11, dà come resto 2; questo, unito con lo 0 del secondo posto, dà 20, che diviso per 11 dà come resto 9; questo, unito con il 9 del primo posto, dà 99, che diviso per 11, dà come resto 0, come deve essere. E questo è il metodo per cercare le prove dei numeri. Perciò si pone il 903309 e il suo residuo sopra il 23. Poi si moltiplica 32 per le sue frazioni, nell'ordine in cui si è moltiplicato 23 per le sue; risulta 2923156; questo si pone con il suo residuo, che è 5, sopra il 32; si moltiplica 903309 per 2923156 e si divide per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione, ma prima, in virtù della semplificazione che può essere fatta, si divide 903369 per 3; risulta 301103; si divide 2025156 per 4; risulta 730789, che si moltiplica per 301103; si cancellano dalla divisione il 3 che è sotto la prima linea delle superiori e il 4 che è sotto la prima linea delle inferiori, e i restanti numeri, adattati sotto una linea di frazione, danno come prodotto $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 9\ 10\ 10\ 10\ 10\ 13\ 17}$, come mostrato nel problema. E poiché si è ottenuto questo prodotto dalla divisione del numero generato dalla moltiplicazione di 301103 per 730789, il residuo dello stesso prodotto sarà dato dalla moltiplicazione del residuo di 301103, che è 0, per il residuo di 730789 che è 4. Perciò il residuo del suddetto prodotto è 0, poiché la moltiplicazione di 0 per 4 dà 0.

Sulla stessa con tre parti sotto ciascuna frazione.

Ancora, con tre frazioni sotto una sola linea, come nella moltiplicazione di $\frac{1\ 2\ 1}{3\ 5\ 5}\ \frac{1\ 2\ 3}{2\ 9\ 10}\ \frac{1\ 1\ 6}{2\ 7\ 17}$ 11 per $\frac{2\ 5\ 1}{3\ 6\ 7}\ \frac{1\ 2\ 2}{5\ 7\ 9}\ \frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 10}$ 22, una volta scritto il problema, si moltiplica l'11 per la sua prima frazione; risulta 2705, che si moltiplica per tutti i numeri che sono sotto le altre due linee di frazione; risulta 36517500, che si conserva. Si moltiplica il 3 che sta sopra il 10 della seconda linea di frazione per il 9, e si addiziona il 2; si moltiplica per 2 e si addiziona l'1; risulta 59, che si moltiplica per i numeri che sono sotto le altre due linee di frazione, vale a dire sotto la terza e sotto la prima; risulta 1053150, che si conserva; poi si calcola il numero della terza frazione, vale a dire si moltiplica l'1 che è sopra il 5 per l'altro 5 che è dopo di esso e si addiziona il 2; si moltiplica per 3, e si addiziona 1; risulta 22 che si moltiplica per tutti i numeri che sono sotto le altre due linee di frazione, vale a dire sotto la seconda e sotto la prima; risulta 942480; si addiziona dunque 942480 a 1053150 e a 36517500; risulta 38513130, che si pone sopra l'11 e le sue frazioni. Poi si moltiplica il 22 per le sue frazioni, nello stesso modo in cui si è moltiplicato l'11 per le sue frazioni; risulta 145288710, che si pone sopra il 22 e le sue frazioni; si moltiplica 38513130 per 145288710, e si divide per tutte le parti che sono sotto tutte le linee di frazione, e si ottiene il risultato della suddetta moltiplicazione. Tuttavia, se si vuole semplificare ciò che può essere semplificato, si divide 38513130 per il 10 che è sotto la

$$38513130 \quad 7$$
$$\frac{1\ 2\ 1}{3\ 5\ 5}\ \frac{1\ 2\ 3}{2\ 9\ 10}\ \frac{1\ 1\ 6}{2\ 7\ 17}\ 11$$
$$145288710 \quad 6$$
$$\frac{2\ 5\ 1}{3\ 6\ 7}\ \frac{1\ 2\ 2}{5\ 7\ 9}\ \frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 10}\ 22$$
$$\frac{1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 3\ 9\ 5\ 0\ 4}{2\ 7\ 7\ 8\ 9\ 9\ 10\ 10\ 10\ 17}\ 274 \quad 10$$

seconda linea di frazione del numero superiore; risulta 3851313 che si divide per il 3 che sta sotto la terza linea di frazione del numero superiore; risulta 1283771, che si conserva, perché non può essere diviso per alcun numero esistente sotto una delle altre sei linee di frazione; poi si divide 145288710 per il 10 che sta sotto la prima linea di frazione del numero inferiore, e per il 7 e per il 9 che stanno sotto la seconda linea di frazione; poiché essi si possono dividere integralmente, risulta 230617 che si moltiplica per 1283771; risulta 296059416707 che si divide per tutti gli altri numeri che stanno sotto le linee di frazione, vale a dire con $\frac{1\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0}{2\;2\;2\;3\;5\;5\;6\;6\;7\;7\;8\;9\;17}$, che adattato in base al metodo sopra descritto, dà $\frac{1\;2\;1\;0\;1\;3\;9\;5\;0\;4}{2\;7\;7\;8\;9\;9\;10\;10\;10\;17}$ 274, come risultato della suddetta moltiplicazione.

Qui finisce la quinta parte del sesto capitolo, e inizia
la sesta sulla moltiplicazione delle frazioni senza interi.

Se si vuole moltiplicare 1/3 per 1/4, allora si moltiplica l'1 che è sopra il 3, per l'1 che è sopra il 4; risulta 1 che si divide per 3 e per 4 che sono sotto le linee di frazione, cioè con $\frac{1\;0}{3\;4}$, o con $\frac{1\;0}{2\;6}$; risulta $\frac{1\;0}{3\;4}$ o $\frac{1\;0}{2\;6}$, cioè un dodicesimo, o la dodicesima parte di un intero; così si capisce quanto è moltiplicare 1/3 per 1/4; e quanto è prendere $\frac{1\;0}{3\;4}$ o $\frac{1\;0}{2\;6}$; e lo stesso di tutte le frazioni, in quanto la moltiplicazione di una frazione per una frazione, realizza quanto è prendere una di esse dall'altra; poiché, quando si moltiplica 1 per 1/4, allora si prende 1/4; quindi, quando si moltiplica un terzo per un quarto, allora si prende un terzo di un quarto, e così dalla moltiplicazione di un terzo per un quarto risulta un dodicesimo.

Sulla stessa.

Ancora, se si vuole moltiplicare 2/3 per 3/4, si moltiplica il 2 che è sopra il 3 per il 3 che sta sopra il 4; risulta 6 che si divide per 3 e per 4 che sono sotto le linee di frazione; risulta 1/2 di un intero.

Sulla stessa.

Ancora, se si vuole moltiplicare 3/7 per 4/9, si moltiplica il 3 per il 4 che stanno sopra le linee di frazione; risulta 12 che si divide per 7 e per 9 che sono sotto le linee di frazione; risulta $\frac{5\;1}{7\;9}$ di un intero, cioè dodici parti di sessantatre parti di un intero, che sono quattro parti di 21 di un intero. E questo si trova in due modi diversi. Il primo modo è dividere 12 e 63 per 3, perché questa divisione di ciascuno di essi può essere fatta integralmente; risultano 4 e 21; se si divide 4 per 21, risulta 4/21 di un intero. Altrimenti, si divide 12 con $\frac{1\;0}{7\;9}$; si divide prima 12 per 3; risulta 4; similmente si divide 9 per 3; risulta 3; si divide il 4 per 7; il quoziente risulta $\frac{1\;1}{3\;7}$, che è la settima parte di un intero, e in più la terza parte di un settimo, che è tanto quanto quattro parti di 21.

Sulla stessa con due parti sotto una frazione.

Se si vuole moltiplicare $\frac{1\ 4}{2\ 7}$ per $\frac{2\ 3}{3\ 5}$, si scrive il problema, e si moltiplica il 4 che sta sopra il 7 della prima linea di frazione, per il 2 che sta sotto la stessa linea di frazione, e si addiziona l'1 che sta sopra il 2; risulta 9, che si pone sopra $\frac{1\ 4}{2\ 7}$; similmente si moltiplica il 3 che sta sopra il 5 della linea di frazione inferiore, per il 3 che sta sotto la stessa linea di frazione e si addiziona il 2 che sta sopra lo stesso 3; risulta 11, che si pone sopra il $\frac{2\ 3}{3\ 5}$; si moltiplica il 9 per l'11; risulta 99, che si divide per 2, per 7, per 3 e per 5 che sono sotto le linee di frazione; risulterà $\frac{5\ 4}{7\ 10}$ di un intero.

9
$\frac{1\ 4}{2\ 7}$
11
$\frac{2\ 3}{3\ 5}$
$\frac{5\ 4}{7\ 10}$

Sulla stessa con tre parti sotto una frazione.

Ancora, se si vuole moltiplicare una frazione con tre parti sotto la sua linea per un'altra frazione con tre parti sotto la sua linea, come $\frac{1\ 5\ 3}{2\ 8\ 11}$ per $\frac{1\ 4\ 7}{3\ 9\ 13}$, si scrive il problema e si moltiplica il 3 che è sopra l'11 per la sua frazione, cioè per 8, e si addiziona il 5 che si moltiplica per il 2, e si addiziona l'1; risulta 59, che si pone sopra $\frac{1\ 5\ 3}{2\ 8\ 11}$; poi si moltiplica il 7 che è sopra il 13 per la sua frazione, cioè per 9, e si addiziona il 4 che si moltiplica per 3, e si addiziona 1; risulta 202, che si pone sopra il $\frac{1\ 4\ 7}{3\ 9\ 13}$; si moltiplica il 59 per il 202 e si divide per tutti i numeri che sono sotto entrambe le linee di frazione, il cui arrangiamento è $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$; il prodotto sarà $\frac{1\ 2\ 5\ 5\ 2}{3\ 8\ 9\ 11\ 13}$.

59 3
$\frac{1\ 5\ 3}{2\ 8\ 11}$
202 6
$\frac{1\ 4\ 7}{3\ 9\ 13}$
$\frac{1\ 2\ 5\ 5\ 2}{3\ 8\ 9\ 11\ 13}$ 0

Sulla stessa con due frazioni.

11 4
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$
23 2
$\frac{1}{6}$ $\frac{3}{5}$
$\frac{1\ 0\ 7}{4\ 9\ 10}$ 0

Se si vuole moltiplicare $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{5}$, allora si scrive il problema e si moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 4 che sta sotto la seconda linea di frazione; risulta 8. Si moltiplica l'1 che sta sopra lo stesso 4 per il 3 che sta sotto la prima linea di frazione; risulta 3 che si addiziona a 8; risulta 11 che si scrive sopra $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$; poi si passa a $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{5}$; si moltiplica il 3 che sta sopra il 5 per il 6, e l'1 che è sopra il 6 per il 5, e si addizionano insieme; risulta 23, che sii scrive sopra $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{5}$; si moltiplica 11 per 23; risulta 253, che si divide per tutti i numeri che stanno sotto le linee di frazione.

Sulla stessa con due parti sotto ciascuna linea.

E se si hanno frazioni con due parti sotto ciascuna linea, come con $\frac{1\ 3}{4\ 8}$ $\frac{1\ 4}{2\ 7}$ e $\frac{1\ 6}{2\ 11}$ $\frac{1\ 5}{3\ 9}$, allora, scritto il problema, si moltiplica il 4 che sta sopra il 7 per la sua frazione, cioè per 2, e si addiziona l'1; risulta 9, che si moltiplica per 8 e per 4, che sono sotto la seconda linea dello stesso lato; risulta 288 che si conserva; si moltiplica il 3 che sta sopra l'8 per la sua linea di frazione, vale a dire per 4 e si addiziona l'1; risulta 13 che si moltiplica per 2 e per 7 che stanno sotto la prima linea di frazione; risulta 182, che si

addiziona a 288; risulta 470, che si pone sopra le frazioni superiori; si moltiplicano nello stesso modo le altre due frazioni inferiori e si ottiene 1407, che si pone sopra le sue frazioni; si moltiplica 470 per 1407 e si divide per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione, e si ottiene la moltiplicazione cercata. Se poi si vuole semplificare, si divide 1407 per 7; risulta 201, che si divide per 3; risulta 67 che si moltiplica per 407; risulta 31490, che si divide per tutti i numeri che sono sotto le linee, tranne che per 7 e per 3, per cui si è diviso il 1407. E adattate le parti suddette sotto una sola linea, risulta $\frac{1\;0\;0\;1\;9}{6\;8\;8\;9\;11}$. In tal modo si potrà moltiplicare, anche se sotto le linee di frazioni saranno poste tre o più frazioni.

Su tre frazioni.

Se si vuole moltiplicare $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{5}$, si scrive il problema e si iniziano a moltiplicare fra loro le frazioni superiori, così: si moltiplica l'1 che è sopra il 3 per il 4 che è sotto la seconda linea di frazione, e per 5 che sta sotto la terza; risulta 20; si moltiplica l'1 che è sopra il 4 della seconda linea di frazione per il 5 che sta sotto la terza e per il 3 che sta sotto la prima; risulta 15; si moltiplica l'1 che è sopra il 5 della terza linea di frazione per il 4 che sta sotto la seconda e per il 3 che sta sotto la prima; risulta 12 che si addiziona al 15 e al 20 tenuti; risulta 47, che si pone sopra $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$; similmente con $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{5}$, e si ha 149 per la loro somma, che si scrive sopra $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{5}$; si moltiplica 47 per 149; risulta 7003 che si divide per tutte le frazioni; e adattando risulterà $\frac{1\;1\;5\;5\;5}{2\;7\;9\;10\;10}$.

47 3

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$

149 6

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{5}$

$\frac{1\;1\;5\;5\;5}{2\;7\;9\;10\;10}$ 0

Sulla stessa con due parti sotto ciascuna.

E se si hanno frazioni con due parti sotto ciascuna linea, come con $\frac{3\;2}{4\;9}$ $\frac{2\;3}{3\;10}$ $\frac{1\;6}{2\;11}$ per $\frac{4\;1}{5\;8}$ $\frac{1\;3}{3\;7}$ $\frac{1\;7}{2\;13}$, allora, scritto il problema, si moltiplicano le prime tre frazioni superiori fra loro, cioè il 6, che sta sopra l'11, per il 2, e si addiziona l'1; risulta 13 che si moltiplica per il 10 e per il 3 che stanno sotto la seconda linea di frazione; tutto questo si moltiplica per il 9 e per il 4 che stanno sotto la terza linea di frazione; risulta 14040, che si tiene; si moltiplica il 3 che sta sopra il 10 della seconda frazione per il 3 che sta sotto la frazione dopo di essa e si addiziona il 2 che sta sopra tale 3; risulta 11 che si moltiplica per il 9 e per il 4 che stanno sotto la terza linea di frazione e per il 2 e per l'11 che stanno sotto la prima; risulta 8712 che si tiene; si moltiplica il 2 che sta sopra il 9 della terza frazione per 4 e si addiziona il 3; risulta 11 che si moltiplica per il 3 e per il 10 che stanno sotto la seconda linea e per il 2 e per l'11 che stanno sotto la prima; risulta 7260 che si addiziona a 8712 e a 14040 tenuti; risulta 30012 che si pone in alto nel problema. Poi si moltiplicano fra loro le tre frazioni inferiori e il loro prodotto sarà 27914, che si pone sopra tali frazioni; si moltiplica 30012 per 27914 e si divide il prodotto per tutte le parti che stanno sotto le frazioni, e si ottiene la moltiplicazione richiesta. Oppure, se si vuole semplificare, si

30012

$\frac{3\;2}{4\;9}$ $\frac{2\;3}{3\;10}$ $\frac{1\;6}{2\;11}$

27914

$\frac{4\;1}{5\;8}$ $\frac{1\;3}{3\;7}$ $\frac{1\;7}{2\;13}$

$\frac{2\;1\;4\;2\;6\;8\;10\;7}{3\;7\;8\;9\;10\;10\;11\;13}$ 1

opera in base al metodo che abbiamo mostrato sopra, e si ottiene $\frac{2\ 1\ 4\ 2\ 6\ 8\ 10\ 7}{3\ 7\ 8\ 9\ 10\ 10\ 11\ 13}$ 1 per la moltiplicazione richiesta. Se si hanno tre denominatori sotto ciascuna linea di frazione, o più frazioni con gli interi, o a seguito di interi, allora si potranno accuratamente fare tutti i calcoli secondo il metodo descritto sopra.

Qui inizia la settima parte sulla moltiplicazione dei numeri e delle frazioni la cui linea di frazione termina con un cerchio.

2572	9
$\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}$o	11
14292	3
o$\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$	22
$\frac{10\ 11}{3\ 5\ 7\ 9}$	270

Se si vuole moltiplicare 11 e quattro noni, e cinque ottavi di quattro noni, e due terzi di cinque ottavi di quattro noni, che si scrive così, $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}$ o 11, per 22 e sei settimi di otto noni di nove decimi, che si scrive così, o $\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ 22, si scrive il problema e si moltiplica 11 per la sua frazione, così: si moltiplica 11 per 9 e si addiziona il 4, e si ha 103 noni che si moltiplica per 8, e si ha 824 settantaduesimi, a cui si addiziona la moltiplicazione di 5 per 4, che sono sopra la linea di frazione; risulta 844 settantaduesimi. Quando si moltiplica il 4 che sta sopra il 9 per l'8, risulta un numero la cui proporzione al numero risultante da 9 per 8 è come la proporzione di 4 a 9. Perciò 32 è 4/9 di 72. Inoltre, la proporzione del numero risultante da 5 per 4, cioè 20, con il numero risultante da 8 per 4, cioè 32, è come la proporzione di 5 a 8. Perciò 20 è cinque ottavi di quattro noni di 72, cioè è 20 settantaduesimi. Poi si moltiplica 844 per 3 e si addiziona il 40 che proviene dalla moltiplicazione di 2 per 5 e per 4, che sono sopra la linea di frazione; risulta 2572 duecentosedicesimi. Questo si pone sopra l'11 con il suo residuo, che è 9. Poi si moltiplica il 22 per la sua linea di frazione, cosa che avviene così: si moltiplica il 22 per il 10, per il 9 e poi per il 7; risulta 13860 seicentotrentesimi, a cui si addiziona il prodotto di 6 per 8, e per 9, che stanno sopra la linea di frazione, vale a dire 432; risulta 14292 seicentotrentesimi; questo si scrive sopra il 22 con la sua prova che è 3; si moltiplica 2572 per 14292 e si divide il prodotto per tutte le parti che sono sotto entrambe le linee di frazione; poi si semplifica ciò che si può semplificare, e si ottiene il prodotto della moltiplicazione assegnata $\frac{10\ 11}{3\ 5\ 7\ 9}$ 270.

E se vorrai ridurre o $\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ nelle parti di un intero, ti mostrerò come farlo in due modi. Si moltiplica prima il 9 per l'8 poi per il 3; risulta 216, di cui si fanno colonne; si prendono 4/9 di esso; risulta 96, di cui si prendono 5/8; risulta 60; di cui si prendono 2/3; risulta 40; si addizionano 96, 60 e 40; risulta 196 che si divide per 216; risulta 49/54, cioè $\frac{1\ 8}{6\ 9}$; altrimenti, si moltiplica il 4 che sta sopra il 9 per 8 e si addiziona il prodotto di 5 per 4; risulta 52 che si moltiplica per 3 e si addiziona il prodotto di 2 per 5 per 4, cioè 40; risulta 196, che diviso per 8, per 3 e per 27, che stanno sotto la frazione, dà $\frac{1\ 8}{6\ 9}$. Ancora, se si vuole ridurre o $\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ nelle parti di un intero, si moltiplicano il 6 per l'8 e per il 9, vale a dire i numeratori; risulta 432, che si divide per i denominatori, e semplificando, risulterà 24/35, cioè $\frac{4\ 4}{5\ 7}$. E se si vuole moltiplicare $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}$ o per o $\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$, scritto il problema,

si moltiplica il 196 trovato, vale a dire il numero della linea di frazione superiore, per 432, vale a dire per il numero della linea di frazione inferiore, e si divide il prodotto per tutti i denominatori di entrambe; e semplificando, risulterà $\frac{3\ 5}{5\ 9}$.

Se si vuole moltiplicare 11 e sette decimi e quattro noni di sette decimi e tre ottavi di quattro noni di sette decimi, più cinque undicesimi e cinque sesti di cinque undicesimi e tre quarti di cinque sesti di cinque undicesimi, per 22 e tre ottavi di quattro noni di sette decimi, più tre quarti di cinque sesti di cinque undicesimi, si scrivi come si vede in margine; si moltiplica 11 per 10 e si addiziona il 7; si moltiplica per 9 e si addiziona quattro settimi; si moltiplica per 8 e si addiziona 3 quarti per 7; risulta 8732 che si moltiplica per 11, per 6 e per 4, che stanno sotto l'altra linea di frazione; risulta 2305248. Si moltiplica il 5 che sta sopra l'11 per il 6 e si addiziona cinque quinti per 4; si addiziona tre volte cinque quinti, vale a dire la moltiplicazione dei numeri che sono sopra la frazione; risulta 295 che si moltiplica per i denominatori della prima frazione, cioè per 8, per 9 e per 10; risulta 212400 che si addiziona all'altro numero trovato; risulta 2517648, che si pone sopra l'11 col suo residuo di 7, che è 0; si moltiplica il 22 per le sue frazioni, vale a dire per 10, per 9 e per 8, e si addiziona il prodotto di 3 per 4 moltiplicato per 7, cioè 84; risulta 15924 che si moltiplica per 11, per 6 e per 4; risulta 4203936. A questo si addiziona il prodotto del numeratore della seconda frazione per i denominatori della prima frazione, vale a dire per 75, per 8, per 9 e per 10; il 75 risulta dal 3 per 5 e per 5, che stanno al numeratore; risulta 54000 che si addiziona a 4203936; risulta 4257936 che si pone sopra il 22 col suo residuo, che è 4; si moltiplica il numero posto sopra l'11 per il numero posto sopra il 22 e si divide il prodotto per tutti i numeri che sono al denominatore; e semplificando ciò che si può semplificare, si ottiene il risultato cercato, come si mostra nel problema.

$$\begin{array}{cc} 2517648 & 0 \\ \frac{3\ 5\ 5}{4\ 6\ 11}\circ\ \frac{3\ 4\ 7}{8\ 9\ 10}\circ & 11 \\ 4257936 & 4 \\ \circ\frac{3\ 5\ 5}{4\ 6\ 11}\ \circ\frac{3\ 4\ 7}{8\ 9\ 10} & 22 \\ \frac{5\ 5\ 5\ 0\ 0\ 8\ 7}{6\ 8\ 9\ 10\ 10\ 11\ 11} & 0 \end{array}$$

Qui inizia l'ottava parte del sesto capitolo sulla moltiplicazione delle parti dei numeri con frazioni.

Se si vuole moltiplicare $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{7}$ 29, che si scrive $\frac{4}{7}$ 29 $\frac{3}{5}$, per $\frac{6}{11}$ di $\frac{2}{3}$ 38, che si scrive così $\frac{2}{3}$ 38 $\frac{6}{11}$, si scrive il problema e si moltiplica il 29 per la frazione che è dopo di esso, cioè per 7 e si addiziona il 4; risulta 207 che si moltiplica per il 3 che sta sopra l'altra frazione, cioè sopra il 5; risulta 621 che si pone sopra $\frac{4}{7}$ 29 $\frac{3}{5}$; si moltiplica 38 per la frazione che è dopo di esso, cioè per 3 e si addiziona il 2; risulta 116 che si moltiplica per il 6 che sta sopra l'11; risulta 696 che si pone sopra $\frac{2}{3}$ 38 $\frac{6}{11}$. Si moltiplica 621 per la terza parte di 696 e si divide per tutte le restanti parti da entrambi i lati, vale a dire con $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 7\ 11}$; e si ottiene $\frac{2\ 2\ 2}{5\ 7\ 11}$ 374 come prodotto della moltiplicazione cercata.

$$\begin{array}{c} 621 \\ \frac{4}{7}\ 29\ \frac{3}{5} \\ 696 \\ \frac{2}{3}\ 38\ \frac{6}{11} \\ \frac{2\ 2\ 2}{5\ 7\ 11}\ 374 \end{array}$$

Sulla stessa.

Ancora, se si vuole moltiplicare $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ di $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33, che si scrive così $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33 $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$, per $\frac{1\ 3}{4\ 7}$ di $\frac{1}{11}\ \frac{5}{6}$ 244, che si scrive $\frac{1}{11}\ \frac{5}{6}$ 244 $\frac{1\ 3}{4\ 7}$, allora si scrive il problema come mostrato; si moltiplica il 33 per la frazione che è dopo, vale a dire per 9 e si addiziona il 5; si moltiplica per 7 e si addiziona il 2; risulta 2116; poi si moltiplica il 3 che sta sopra il 4 per il 5, e si addiziona l'1 che sta sopra il 5 per il 4; risulta 19 che è il numero delle due frazioni che stanno prima del 33; si moltiplica 2116 per 19; risulta 40204, che si pone sopra il $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33 $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$; si esegue la prova del 13, nell'ordine in cui si è moltiplicato; il residuo è 8, che si pone sopra il 40204. Si moltiplica il 244 per la frazione che è dopo di esso, vale a dire per 6 e si addiziona il 5; si moltiplica per 11 e si addiziona la moltiplicazione di 1 che è sopra l'11 per il 6; risulta 16165 che si moltiplica per il numero della frazione che è prima di 244, vale a dire per 13, che risulta dalla moltiplicazione del 3 che sta sopra il 7 per il 4, una volta addizionato l'1 che sta sopra il 4; risulta 210145 che si pone sopra il 244 e le sue frazioni. E sopra di esso si pone 0, che è il suo residuo di 13; si moltiplica il 40304 per 210145 e si divide il prodotto per tutti i denominatori che sono sotto tutte le linee di frazione. E così si ottiene la moltiplicazione cercata. Per semplificare, si divide 40204 per il 4 che sta sotto una delle frazioni date; risulta 10051 che si tiene, dal momento che niente altro può essere semplificato. Poi si divide 210145 per il 5 che sta sotto un'altra linea di frazione; risulta 42029 che si moltiplica per 10051 e si divide per tutte le altre frazioni; il quoziente sarà $\frac{2\ 6\ 0\ 1\ 4\ 4}{3\ 7\ 7\ 8\ 9\ 11}$ 3628.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 40204 & & 8 \\
\frac{2\ 5}{7\ 9} & 33\ \ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} & \\
 & 21045 & & 0 \\
\frac{1}{11}\ \ \frac{5}{6} & 244 & \frac{1\ 3}{4\ 7} & \\
\frac{2\ 6\ 0\ 1\ 4\ 4}{3\ 7\ 7\ 8\ 9\ 11} & 3628 & & 0
\end{array}
$$

Sulla stessa con più frazioni.

Ancora, se si vuole moltiplicare $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ di $\frac{2\ 2\ 3}{13\ 11\ 5}$ 42 per $\frac{1\ 1\ 5}{9\ 8\ 7}$ di $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ 331, allora si scrive il problema e si inizia a moltiplicare il 42 per le frazioni che stanno dopo di esso; risulta 30644, di cui si calcola $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ e si trova il numeratore delle stesse frazioni; cioè, si moltiplica il 5 che sta sopra il 9 per l'8 e si addiziona il 3; si moltiplica per 7 e si addiziona il 2; risulta 303, per il quale si moltiplica 30644; risulta 9285132; poi si trova il numeratore del lato inferiore; si moltiplica 331 per la frazione che è dopo di esso, ovvero per 11, e si addiziona il 3 che sta sopra tale 11; si moltiplica per 5 e per 3 che stanno sotto la stessa linea di frazione, e si addiziona il 2 che sta sopra il 3; risulta 54662; e così si trova il numeratore di $\frac{1\ 1\ 5}{9\ 8\ 7}$ che è 479, per il quale si moltiplica 54662; risulta 26183098 che si pone sopra il 331 e le sue frazioni; si moltiplica 9285132 per 26183098 e si divide per tutti i denominatori di tutte le frazioni, e si semplifica ciò che può essere semplificato, ottenendo infine per la moltiplicazione richiesta $\frac{1\ 5\ 6\ 3\ 7\ \ 7\ 7\ 4\ 8\ 7}{2\ 7\ 7\ 9\ 9\ 10\ 10\ 11\ 11\ 13}$ 8112, come qui mostrato.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & 9285132 \\
\frac{2\ 2\ 3}{13\ 11\ 5} & 42 & \frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9} \\
 & & 26183098 \\
\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11} & 331 & \frac{1\ 1\ 5}{9\ 8\ 7} \\
 & \frac{1\ 5\ 6\ 3\ 7\ \ 7\ 7\ 4\ 8\ 7}{2\ 7\ 7\ 9\ 9\ 10\ 10\ 11\ 11\ 13} & \\
8112 & &
\end{array}
$$

Capitolo 7

Qui inizia il settimo capitolo sull'addizione,
la sottrazione e la divisione dei numeri con frazioni e la riduzione di più parti ad una singola parte.

Divideremo il settimo capitolo in sei parti.

Nella prima parte mostreremo l'addizione di una frazione con un'altra, la sottrazione di una frazione da un'altra e la divisione di una frazione per un'altra.

Nella seconda l'addizione e la sottrazione di due frazioni da due, e la divisione di una per l'altra.

Nella terza la divisione di numeri interi per interi con frazioni e viceversa.

Nella quarta l'addizione, la sottrazione e la divisione di numeri interi con frazioni con interi con frazioni.

Nella quinta, insegneremo le addizioni, le sottrazioni e le divisioni di parti di numeri con frazioni.

Nell'ultima, ancora, mostreremo come ridurre più parti ad una singola parte.

Sull'addizione di $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{4}$.

4	3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{7}{12}$	Somma

Se volessi addizionare $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, ti insegnerò a farlo in due modi differenti. Prima, secondo il metodo comune, si trova il numero di cui $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ sono interi; questo numero si trova così: si moltiplica il 3 per il 4, che sono sotto le frazioni; risulta 12; si calcola la sua terza parte che è 4, e la quarta parte, che è 3, e si addizionano insieme; risulta 7, che si divide per 12; risulta $\frac{7}{12}$, cioè sette parti di dodici parti di un intero.

Secondo l'altro metodo, si scrive $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ così; si moltiplica l'1 che è sopra il 3 per il 4; risulta 4, che si pone sopra $\frac{1}{3}$; si moltiplica l'1, che è sopra il 4, per il 3; risulta 3, che si pone sopra $\frac{1}{4}$, e si addizionano insieme; risulta 7, che si divide per 3 e per 4 che sono sotto le frazioni, cioè per 12; risulta similmente $\frac{7}{12}$ per la loro addizione; e saprai così cosa è addizionare $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, che sono parti dell'unità; sono infatti $\frac{7}{12}$ dell'unità. E così intendi per le addizioni di tutte le frazioni.

Sulla sottrazione di $\frac{1}{4}$ *da* $\frac{1}{3}$.

Se si vuole sottrarre $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{3}$, allora il 3 che è sopra $\frac{1}{4}$, che è un quarto di 12, si sottrae dal 4 che è sopra $\frac{1}{3}$, che è un terzo di 12; rimane 1 che si divide per il 12 trovato, ovvero per il 3 e per il 4 che sono sotto le frazioni; risulterà come differenza della suddetta sottrazione $\frac{1}{12}$, cioè $\frac{1\ 0}{2\ 6}$. E per

dividere $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, si divide per 3 il 4 che sta sopra $\frac{1}{3}$, e si ottiene $\frac{1}{3}$ 1 per la frazione e l'intero. Esemplificando, il rapporto di $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, è come il rapporto di 12 volte $\frac{1}{3}$ a 12 volte $\frac{1}{4}$, cioè come 4 sta a 3, così $\frac{1}{3}$ sta a $\frac{1}{4}$. Per questo la divisione di $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$ dà lo stesso quoziente che risulta da 4 diviso per 3; o altrimenti, quando si dice, dividere $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, allora s'intenda di calcolare la quarta parte di un terzo di un intero. Per questo il quadruplo di un terzo, vale a dire quattro terzi, è $\frac{1}{3}$ 1, come detto prima. E per dividere $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{3}$, si divide il 3 posto sopra $\frac{1}{4}$ per il 4 posto sopra $\frac{1}{3}$; risulta $\frac{3}{4}$, come il rapporto di $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, è come il rapporto di 3 volte $\frac{1}{4}$ a 3 volte $\frac{1}{3}$, cioè come 3 sta a 4, cioè $\frac{3}{4}$ di un intero.

12	10
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1\ 2}{3\ 5}$ 1	

Ancora, se si vuole addizionare $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, si trova il numero di cui $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ sono interi, così: si moltiplica il 3 per il 5 che sono sotto le frazioni; risulta 15, e di questo numero si trovano $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}$; perciò, si prende $\frac{2}{3}$ di 15, che è 10, e $\frac{4}{5}$ di 15, che è 12, e si sommano insieme; risulta 22, che si divide per 15; il quoziente sarà $\frac{7}{15}$ 1 per l'addizione cercata. Oppure, si scrive $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}$, come si mostra a margine, e si moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 5; risulta 10 che si pone sopra $\frac{2}{3}$, e si moltiplica il 4 che sta sopra il 5 per il 3; risulta 12 che si pone sopra $\frac{4}{5}$; si addiziona quindi il 10 con il 12; risulta 22 come sopra. Si divide per i denominatori, cioè con $\frac{1\ 0}{3\ 5}$; risulta $\frac{1\ 2}{3\ 5}$ 1, cioè $\frac{7}{15}$ 1, come si è trovato con l'altro metodo.

Ancora, se si vuole sottrarre $\frac{2}{3}$ da $\frac{4}{5}$, allora si trovano il 10 e il 12, con uno dei due metodi sopra descritti; si sottrae 10 da 12; rimane 2 che si divide per i denominatori, vale a dire con $\frac{1\ 0}{3\ 5}$; risulta $\frac{2\ 0}{3\ 5}$, cioè $\frac{2}{15}$, come differenza della sottrazione cercata. E se si vuole dividere $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$, si divide 12 per 10; risulta $\frac{1}{5}$ 1, e il quoziente sarà uno e una frazione. E se si vuole dividere $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, si divide 10 per 12; il quoziente sarà $\frac{5}{6}$.

L'addizione di $\frac{5}{6}$ *e* $\frac{7}{10}$.

Ancora, se si vuole addizionare $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{10}$, si trova il numero di cui $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{10}$ sono interi; si moltiplica il 6 per il 10 che sono sotto le frazioni; risulta 60; tuttavia si può trovare anche un numero più piccolo di 60, per il fatto che il 6 ha in comune con il 10 un fattore, che è $\frac{1}{2}$, dal momento che entrambi i numeri si dividono integralmente per 2. Per cui si divide 60 per 2; risulta 30, di cui si trovano $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{10}$; si può trovare questo 30 in un altro modo, cioè si moltiplica il 6 per la metà del 10, vale a dire per 5, e risulta 30; o si

moltiplica 10 per la metà di 6, cioè per 3, e risulterà similmente 30; si prende $\frac{5}{6}$ di 30, che è 25 e si addiziona con $\frac{7}{10}$ di 30, che è 21; risulta 46 che si divide per 30; risulta $\frac{16}{30}$ 1, cioè $\frac{8}{15}$ 1.

Sulla stessa in un altro modo.

Ancora, in un altro modo, si scrive così, $\frac{7}{10}$ $\frac{5}{6}$; e poiché il 6 e il 10 hanno un fattore comune, cioè 2, si divide il 10 per 2; si ha 5, che si moltiplica per il 5 che sta sopra il 6; risulta 25, come trovato sopra per $\frac{5}{6}$ di 30. Si divide il 6 per il 2; risulta 3, che si pone sotto il 6, e si moltiplica per il 7 che sta sopra il 10; risulta 21 per $\frac{7}{10}$ di 30; si addiziona dunque 21 con 25; risulta 46, che si divide per la metà di 10 e per 6, cioè con $\frac{1\ 0}{5\ 6}$, o per la metà di 6 e per 10, cioè con $\frac{1\ 0}{3\ 10}$; risulterà $\frac{1\ 5}{3\ 10}$ che è $\frac{16}{30}$ 1, o $\frac{8}{15}$ 1.

La sottrazione di $\frac{7}{10}$ *da* $\frac{5}{6}$.

Se si vuole sottrarre $\frac{7}{10}$ da $\frac{5}{6}$, allora si trovano 21 e 25, e si sottrae 21 da 25; rimane 4 che si divide per 30 o per i suoi fattori, cioè con $\frac{1\ 0}{3\ 10}$; risulta $\frac{1\ 1}{3\ 10}$, come differenza della sottrazione richiesta. E se si vuole dividere $\frac{5}{6}$ per $\frac{7}{10}$, si divide 25 per 21; risulta $\frac{1\ 1}{3\ 7}$ 1. E se si vuole dividere $\frac{7}{10}$ per $\frac{5}{6}$, si divide 21 per 25; risulta $\frac{1\ 4}{5\ 5}$.

L'addizione di $\frac{1}{6}$ *e* $\frac{5}{9}$.

Ancora, se si vuole addizionare $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{9}$, allora si trova un numero di cui si possa prendere integralmente $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{9}$; poiché 3 è il fattore comune di 6 e 9, si divide il 6 per il 3; risulta 2 che si moltiplica per 9; risulta 18. Oppure, si divide il 9 per il 3; risulta 3 che si moltiplica per 6; risulterà similmente 18, del quale si trovano $\frac{5}{9}$ e $\frac{1}{6}$; per cui si calcola $\frac{1}{6}$ di 18, che è 3, e si addiziona a $\frac{5}{9}$ di 18, che è 10; risulta 13 che si divide per i fattori di 18; risulterà $\frac{1\ 6}{2\ 9}$; oppure, secondo l'altro metodo, si scrivono le frazioni come mostrato a margine, e si moltiplica l'1, che è sopra il 6, per la terza parte di 9, in virtù del fattore che essi hanno in comune; risulta 3, che si pone sopra $\frac{1}{6}$; si moltiplica il 5 che sta sopra il 9 per la terza parte di 6, cioè per 2; risulta 10, che si pone sopra $\frac{5}{9}$; si addiziona il 3 con il 10; risulta 13 che si divide per un terzo del prodotto di 6 per 9, cioè per 18; risulta $\frac{1\ 6}{2\ 9}$ per la loro addizione, come mostrato nel problema.

10	3
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1\ 6}{2\ 9}$	Somma

La sottrazione di $\frac{1}{6}$ da $\frac{5}{9}$.

10	3
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1\ 3}{2\ 9}$	Differ.

Se si vuole sottrarre $\frac{1}{6}$ da $\frac{5}{9}$, si trovano il 3 e il 10, come sopra, e si sottrae il 3 dal 10; rimane 7, che, in base a quanto già detto, si dividere per 18, o con $\frac{1\ 0}{2\ 9}$, e risulta $\frac{1\ 3}{2\ 9}$ come differenza della suddetta sottrazione. E se si vuole dividere $\frac{5}{9}$ per $\frac{1}{6}$, allora si divide 10 per 3 che sta sopra $\frac{1}{6}$; risulta $\frac{1}{3}$ 3. E per dividere $\frac{1}{6}$ per $\frac{5}{9}$, si divide 3 per 10; risulterà $\frac{3}{10}$.

La seconda parte sull'addizione e la sottrazione
di due frazioni sommate insieme e loro divisione.

Se si vuole addizionare $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$, si vede in quale numero $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$, hanno parti integrali, in questo modo: si moltiplicano insieme tutti i denominatori, cioè 3, 4, 5 e7; risulta 420 che è il minimo multiplo comune a tali numeri, cioè il più piccolo numero di cui le parti sono fattori; si prende 1/3 di 420, che è 140, e si addiziona alla quarta parte di 420 che è 105, alla quinta che è 84, e alla settima che è 60; risulta 389, che si divide per 420; risulta $\frac{389}{420}$ come addizione delle frazioni sopra scritte. Ed è come trovare il numero di cui $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ sono interi.

144	245
$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$
$\frac{5\ 1\ 9}{6\ 7\ 10}$	

Possiamo tuttavia, secondo un altro insegnamento, addizionare $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$; scritte le frazioni come mostrato, si moltiplica l'1 che è sopra il 3 per il 4, e l'1 che è sopra il 4 per il 3; risulta 7 che si moltiplica per 5 e per 7, che sono i denominatori delle altre due frazioni; risulta 245, che sono $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ di 420, come abbiamo trovato più sopra; si scrive dunque 245 sopra $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ nel problema; poi si passa a $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$, e si moltiplica l'1, che è sopra il 5 per il 7, e l'1 che è sopra il 7 per il 5; risulta 12, che si moltiplica per il 3 e il 4, che sono sotto le frazioni; risulta 144, che è $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ di 420; perciò, si pone il 144 sopra $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$, e si addiziona il 144 al 245; risulta 389 che si divide per le frazioni, vale a dire con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 5\ 7}$; e raggruppando le parti frazionarie, risulterà $\frac{5\ 1\ 9}{6\ 7\ 10}$, che è uguale a $\frac{389}{420}$.

La sottrazione di $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ da $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$.

Se si vuole sottrarre $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ da $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$, si trova il 245 e il 144, con uno dei due metodi descritti precedentemente, e si sottrae 144 da 245; resta 101 che, in base a quanto descritto prima, si divide con $\frac{1\ 0\ 0}{6\ 7\ 10}$; risulta $\frac{5\ 2\ 2}{6\ 7\ 10}$ come differenza della suddetta sottrazione. E se si vuole dividere $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$, allora si divide 245 con la scomposizione di 144, e si ha

$\frac{1\,2\,6}{2\,8\,9}$ 1 che è il quoziente. E se si divide 144 per la scomposizione di 245, si ottiene $\frac{4\,0\,5}{5\,7\,7}$ per la divisione di $\frac{1}{7}\ \ \frac{1}{5}$ per $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$.

L'addizione di $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$ *e* $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$.

Ancora, se si vuole addizionare $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$ e $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$, si vede in quale numero si trovano i fattori dei denominatori, ed esso è 2520, che è il prodotto dei quattro numeri che sono sotto le frazioni, e che, non avendo alcun fattore in comune, non si trovano in un numero più piccolo; poi si prendono i $\frac{2}{3}$ di 2520, che è 1512, e si addizionano con i $\frac{2}{7}$ di 2520, che è 720; risulta 2232 che si tiene. Si prendono i $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$ di 2520, che è 1505, e si addizionano con il 2232 tenuto; risulta 3737 che si divide per i divisori di 2520, cioè con $\frac{1\,0\,0\,0}{4\,7\,9\,10}$; il quoziente è $\frac{1\,3\,7\,4}{4\,7\,9\,10}$ 1. Oppure, scritte le frazioni come mostrato, si inizia da $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$, così: si moltiplica il 3, che sta sopra il 5, per il 7, che è al denominatore; risulta 21. Poi si moltiplica il 2 che sta sopra il 7, per il 5; risulta 10, che si addiziona a 21; risulta 31 che si moltiplica per le altre frazioni, vale a dire per 8 e per 9, cioè per 72; risulta 2232, come è stato trovato più sopra per $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$ di 2520; si pone 2232 sopra $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$, e si prende $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$ di esso; si moltiplica il 3 che sta sopra l'8 per il 9, e il 2 che sta sopra il 9, per l'8, e si addizionano insieme; risulta 43, che si moltiplica per le altre frazioni, vale a dire per 5 e per 7; risulta 1505, come abbiamo trovato sopra per $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$ di 2520. Scritto il 1505 sopra $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$, si addiziona 1505 con 2232; risulta 3737 che si divide per tutti i numeri che stanno sotto le frazioni, e, raggruppando, risulterà similmente $\frac{1\,3\,7\,4}{4\,7\,9\,10}$ 1.

1505	2232
$\frac{2}{9}\ \frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}\ \frac{3}{5}$
$\frac{1\,3\,7\,4}{4\,7\,9\,10}$	1

La sottrazione di $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$ *da* $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$.

Se si vuole sottrarre $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$ da $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$, si trovano il 2232 e il 1505 scritti sopra, e si sottrae 1505 da 2232; rimane 727 che, in base a quanto detto sopra, si divide con $\frac{1\,0\,0\,0}{4\,7\,9\,10}$; risulta $\frac{3\,6\,7\,2}{4\,7\,9\,10}$, come si vede in figura. E se si vuole dividere $\frac{2}{7}\ \ \frac{3}{5}$ per $\frac{2}{9}\ \ \frac{3}{8}$, si divide 2232 per i divisori di 1505, e se si vuole il contrario, si fa il contrario, e si otterrà il risultato desiderato.

2232	1505
$\frac{2}{7}\ \frac{3}{5}$	$\frac{2}{9}\ \frac{3}{8}$
$\frac{3\,6\,7\,2}{4\,7\,9\,10}$	

L'addizione di $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$.

Ancora, se si vuole addizionare $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$, si cerca il numero nel quale si trovano le frazioni scritte sopra. Si trova 60. Questo numero risulta dalla moltiplicazione di 3 per 4 e per 5, e non occorre che si moltiplichi il 60 per il 6, in virtù del fattore in comune che il 6 ha con il 3 e con il 4; infatti il 3 è contenuto integralmente nel 6, per questo non occorre moltiplicare il 60 per la terza parte di 6, che è 2, e non occorre moltiplicalo neanche per il 2,

22	35
$\frac{1}{6}\ \frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$
$\frac{1\ \,9}{2\ 10}$	

perché esso è tra i fattori del 4; per dire prima: la scomposizione di 6 è $\frac{1\ 0}{2\ 3}$. Perciò, nella moltiplicazione, non ripetiamo il 3 né il 2 che sono nella scomposizione del 6, in virtù del 3 e del 4, per il quale 4 abbiamo moltiplicato quando abbiamo ottenuto 60. Infatti, in ogni numero nel quale si trovino $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$, si troverà anche $\frac{1}{6}$; perciò, si prendono $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$ di 60, e si addizionano insieme; risulta 57 che si divide per 60; risulta $\frac{57}{60}$, ma poiché il 57 ha un fattore in comune con il 60, cioè 3, possiamo esprimere il $\frac{57}{60}$ più elegantemente, dividendo per 3 il 57 e il 60; risulterà $\frac{19}{20}$, che equivale a un intero meno un ventesimo. Parimenti, scrivendo le frazioni in un altro modo come mostrato sopra, si inizia con $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$; si moltiplica l'1, che è sopra il 3, per il 4, e l'1, che è sopra il 4, per il 3; risulta 7 che si moltiplica per il 5 che è al denominatore; risulta 35, che si moltiplica per il 6, non ignorando il fattore in comune che il 6 ha con le parti di $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$; perciò, si scrive il 35 sopra $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$, cioè $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$ di 60; poi si moltiplica l'1, che è sopra il 5, per il 6, e l'1, che è sopra il 6, per il 5; risulta come somma 11, che si deve moltiplicare per 3 e per 4; ma non si moltiplica per il 3 poiché è nella scomposizione di 6, né per il 2, che è nella scomposizione di 4, e anche nella scomposizione di 6. Dunque, si moltiplica 11 per il 2 che rimane da 4; risulta 22, che è $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$ di 60. Si scrive il 22 sopra $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$, e si addiziona il 22 con il 35; risulta 57, come abbiamo trovato più sopra, che si divide con $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 4\ 5}$, dal momento che non si divide per il 6, che abbiamo tralasciato nella moltiplicazione di entrambi i gruppi di frazioni; e raggruppando le suddette frazioni, risulterà $\frac{1\ 9}{2\ 10}$, cioè $\frac{19}{20}$, come mostrato nel problema.

Descriverò un altro metodo, più chiaro, per ricavare i suddetti 35 e 22. Si moltiplica il 3 per il 4 che sono al denominatore da una parte; risulta 12, che si tiene nella mano destra e si moltiplica per il 5 e per il 6, che sono dall'altra parte; risulterà 30 che si tiene nella mano sinistra; si dividono entrambi i numeri tenuti per il loro massimo comune divisore, che è 6; risultano, nella mano destra 2 e nella sinistra 5; si scrive il 2 sotto $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$, e il 5 sotto $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$; si moltiplica il 7 trovato per il 5 posto sotto $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$, e l'11 per il 2 posto sotto $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$; si ottengono 35 e 22, la cui somma, vale a dire 57, si divide per i denominatori di un lato e per il numero posto sotto le altre linee, vale a dire per 5, per 6 e per 2, o per 3, per 4 e per 5, cioè per la scomposizione di 60.

La sottrazione di $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$ da $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$.

22	35
$\frac{1}{6}\ \frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$
$\frac{1\ 2}{6\ 10}$	

Se si vuole sottrarre $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{5}$ da $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}$, si trovano i suddetti 35 e 22 e si sottrae il 22 dal 35; rimane 13, che si divide con la scomposizione $\frac{1\ 0}{6\ 10}$; risulterà $\frac{1\ 2}{6\ 10}$ come differenza della suddetta sottrazione.

L'addizione di $\frac{1}{7}\ \frac{2}{3}$ *e* $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$.

Ancora, se si vuole addizionare $\frac{1}{7}\ \frac{2}{3}$ e $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$, si cerca il numero nel quale si trovano le frazioni suddette, e sarà 315, che risulta dalla moltiplicazione dei denominatori, cancellando tuttavia il 3 che è fattore comune di 9 e di 3, che non occorre ripetere nella moltiplicazione dal momento che $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ si trovano nel 9; per cui, ogni numero che ha $\frac{1}{9}$, ha anche $\frac{1}{3}$; perciò, si prendono $\frac{2}{3}$ di 315, cioè 210, e si somma $\frac{1}{7}$ dello stesso, cioè 45; risulta 255 che si tiene; poi si prende $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ dello stesso 315, che è 234, e si somma al 255; la somma è 489, che si divide con la scomposizione di 315, cioè con $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 7\ 9}$; il quoziente risulta $\frac{4\ 6\ 4}{5\ 7\ 9}$ 1.

Secondo un altro metodo, si scrivono le frazioni come mostrato, e si inizia con $\frac{1}{7}\ \frac{2}{3}$; si moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 7, e l'1 che sta sopra il 7 per il 3, e si addizionano insieme; risulterà 17 che si moltiplica per 5; risulterà 85, che si moltiplica per un terzo di 9, cioè per 3, in virtù del fattore in comune che il 3 del denominatore ha con il 9, e il prodotto di quella moltiplicazione sarà 255, che sono $\frac{1}{7}\ \frac{2}{3}$ di 315, come abbiamo già calcolato più sopra. Posto il 255 sopra $\frac{1}{7}\ \frac{2}{3}$, si passa a $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$, moltiplicando il 3, che sta sopra il 5, per il 9, e l'1, che sta sopra il 9, per il 5; risulterà 32, che si moltiplica per 7; risulterà 234, come più sopra è stato trovato per $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ di 315. Non occorre moltiplicare 234 per il 3 al denominatore, in virtù del suddetto fattore in comune che il 3 ha con il 9. Si pone il 234 sopra $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$, e si addiziona il 234 al 255; risulta 489 che si divide con $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 7\ 9}$, che sono a denominatore, tralasciando la divisione per 3, dal momento che nella moltiplicazioni di entrambi i gruppi frazionari non si è moltiplicato per 3; perciò, la somma delle addizioni delle frazioni non si divide per 3, ma si divide per le altri parti e per le quali la si è moltiplicata; il quoziente sarà $\frac{4\ 6\ 4}{5\ 7\ 9}$ 1, come sopra.

La sottrazione di $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ *da* $\frac{1}{7}\ \frac{2}{3}$.

Se poi si vuole sottrarre $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ da $\frac{1}{7}\ \frac{2}{3}$, si trovano i suddetti 255 e 234 e si sottrae 234 da 255; rimane 21 che, si divide con $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 7\ 9}$; a tal fine, si divide prima per 9, poi per 7 e per 5, per il fatto che 21 si divide integralmente per il 7 e per il 3, che è un fattore di 9; risulta $\frac{3\ 0}{9\ 5}$, come differenza della suddetta sottrazione, cioè $\frac{1\ 0}{3\ 5}$. Per la loro divisione a vicenda si fa come sopra.

L'addizione di $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ *e* $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}$.

58 171
$\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}$ $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$
$\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10}$ 1

Ancora, se si vuole addizionare $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}$, si moltiplicano i denominatori, vale a dire il 4 e il 5; risulta 20, che moltiplicato per 9, dà 180. Non occorre moltiplicare 180 per 10, poiché in 180 si trova $\frac{1}{10}$. Perciò si calcola $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ di 180, vale a dire 171, e si addiziona a $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}$ di di 180, vale a dire a 58; risulta 229, che si divide per 180; risulterà $\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10}$ 1.

Secondo un altro metodo, si scrivono le frazioni, e si moltiplica il 3, che sta sopra il 4, per il 5, e l'1, che sta sopra il 5, per il 4; risulta 19, che si moltiplica per 9; risulta 171, che non si moltiplica per 10, per i fattori in comune che il 10 ha con il 5 e con il 4. Si scrive il 171 sopra $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$, essendo esso $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ di 180; poi si moltiplica il 2, che sta sopra il 9, per il 10, e l'1, che sta sopra il 10, per il 9; la somma è 19 che si moltiplica per il 2, tralasciando i fattori in comune che il 10 ha con il 4 e con il 5; risulterà 58, che sono $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}$ di 180; si addiziona il 58 al 171; risulta 229, che si divide per il 4 e per il 5 che stanno sotto da un lato e per il 9 che sta dall'altro lato, per il quale abbiamo moltiplicato più sopra il 19; oppure si divide per il 9 e per il 10 che sono dall'altro lato, e per il 2, per il quale abbiamo moltiplicato il 29. Infatti, $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 5\ 9}$ o $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 9\ 10}$, sono entrambe la scomposizione di 180; ed il quoziente è ancora $\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10}$ 1.

58 171
$\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}$ $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$
$\frac{1\ 2\ 6}{2\ 9\ 10}$

E se si vuole sottrarre $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}$ da $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$, si trovano i suddetti 171 e 58, e si sottrae 58 da 171; rimane 113, che si divide con la scomposizione sopra scritta $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 9\ 10}$; risulta $\frac{1\ 2\ 6}{2\ 9\ 10}$, come differenza della suddetta sottrazione. E per dividerli a vicenda fra loro, si fa come sopra. Voglio mostrare un metodo per trovare il minimo comune multiplo di qualsiasi numeri dati; così, se si vuole trovare il numero nel quale si trovino i fattori $\frac{1}{10}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$, si moltiplica il denominatore maggiore per il seguente, cioè 10 per 9; non vi sono fattori comuni e si ha 90, che si moltiplica per il fattore in comune che ha con l'8, cioè per la sua metà, perché il numero due è il loro fattore comune; risulta 360, che si moltiplica per il 7, dal momento che non si può semplificare nulla tra loro; risulta 2520, che non occorre moltiplicare per 6, dal momento che la sua scomposizione è $\frac{1\ 0}{2\ 3}$, che sono fattori che si ritrovano tra i fattori dei numeri già moltiplicati. Infatti, $\frac{1}{2}$ è un fattore di 10, la cui scomposizione è $\frac{1\ 0}{2\ 5}$; e $\frac{1}{3}$ è un fattore di 9; inoltre, non bisogna moltiplicare 2520 per 5, dal momento che 5 è un fattore di 10, e neanche bisogna moltiplicarlo per 4 o per 2 dal momento che essi si trovano nella scomposizione di 8. Similmente, non occorre moltiplicare il 2520 per 3 dal momento che esso è fra i fattori del 9. Dunque in 2520 si ritrovano tutte le suddette frazioni ed esso è il minimo comune multiplo di tutti i denominatori suddetti.

Qui inizia la terza parte sulla divisione di numeri interi per interi con frazioni aggiunte, e viceversa.

Se si vuole dividere un numero intero per un numero intero con una o più parti frazionarie, o, viceversa, un numero intero con parti frazionarie per un altro numero intero, allora si fa una frazione di ogni numero e la frazione, o le frazioni, che sono state messe con un numero. Poi si divide la somma delle frazioni di un numero per la somma delle frazioni dell'altro, e si ottiene il quoziente di qualsiasi divisione. E affinché ciò sia più chiaro, nelle pagine seguenti mostreremo diverse divisioni di numeri.

La divisione di 83 per $\frac{2}{3}$ 5.

Se si vuole dividere 83 per $\frac{2}{3}$ 5, si trasforma ciascun numero in una frazione con denominatore tre, così: si moltiplica il 5 per il 3 del denominatore, e si addiziona il 2; risulta 17 terzi; si moltiplica l'83 per il 3, in modo da calcolare la sua frazione a denominatore 3; risulta 249 terzi; poi si divide il 249 per il 17; risulterà $\frac{11}{17}$ 14 per la divisione richiesta. Da ciò risulta evidente che la divisione di 83 per $\frac{2}{3}$ 5 è la stessa di quella di 249 per 17, e questo è quanto chiarisce nel suo libro l'illustrissimo geometra Euclide: cioè che la proporzione tra un numero ed un altro numero, è la stessa che c'è tra i loro multipli per lo stesso numero. perciò moltiplicando 83 e $\frac{2}{3}$ 5 per 3, 249 a 17 staranno nello stesso rapporto; infatti 17 è il triplo di $\frac{2}{3}$ 5, e 249 è il triplo di 83. Viceversa, se si vuole dividere $\frac{2}{3}$ 5 per 83, si divide il 17 per la scomposizione di 249, che è $\frac{1\ 0}{3\ 83}$; risulterà $\frac{2\ 5}{3\ 83}$ per la divisione richiesta.

17	249
$\frac{2}{3}$ 5	83
	$\frac{11}{17}$ 14

17	249
$\frac{2}{3}$ 5	83
	$\frac{2\ 5}{3\ 83}$

La divisione di 94 per $\frac{2}{5}$ 6.

Parimenti, se si vuole dividere 94 per $\frac{2}{5}$ 6, in base all'insegnamento della tecnica precedente, si scrivono i numeri come mostrato, e si moltiplica il 6 per la sua parte frazionaria, cioè per 5, e addiziona il 2; risulta 32 quinti che si scrive sopra $\frac{2}{5}$ 6; si moltiplica il 94 per il 5; risulta 470 quinti, che si scrive sopra il 94; poi si divide il 470 per la scomposizione di 32, che è $\frac{1\ 0}{4\ 8}$; risulta $\frac{1\ 5}{2\ 8}$ 14 per la divisione richiesta. E se si divide 32 per la scomposizione di 470, si ottiene $\frac{2\ \ 3}{10\ 47}$, per la divisione di $\frac{2}{5}$ 6 per 94, come più sopra mostrato in figura. Se poi si vuole dividere 113 per $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 11, una volta scritti i numeri, si moltiplica l'11 per la sua parte frazionaria, risulterà 183 sedicesimi, che si scrive sopra $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 11; poi si moltiplica il 113 per l'8 e per il 2 che stanno sotto la linea di frazione, cioè per il 16; risulta 1808 sedicesimi che si pone sopra il 113; quindi, si divide 1808 per la scomposizione di 183; risulterà $\frac{2\ 53}{3\ 61}$ 9 per la divisione richiesta; se si

32	470
$\frac{2}{5}$ 6	94
	$\frac{1\ 5}{2\ 8}$ 14

32	470
$\frac{2}{5}$ 6	94
	$\frac{2\ \ 3}{10\ 47}$

1808	183
113	$\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 11
	$\frac{2\ 53}{3\ 61}$ 9

divide 183 per la scomposizione di 1808, si ottiene $\frac{1\ 3\ 11}{2\ 8\ 113}$, per la divisione di $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 11 per 113. Anche con più parti, poste sotto la stessa linea, si procedere calcolando similmente.

La divisione di 217 per $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ 13.

167	2604
$\frac{1}{4}\frac{2}{3}$ 13	217
$\frac{99}{167}$ 15	

167	2604
$\frac{1}{4}\frac{2}{3}$ 13	217
$\frac{1\ 5\ 6\ 1}{2\ 6\ 7\ 31}$	

Se si vuole dividere 217 per $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ 13, si scrivono i numeri e si moltiplica il 13 per le sue frazioni; risulta 167 dodicesimi, che si scrive sopra $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ 13; poi si moltiplica il 217 per i denominatori, vale a dire per 3 e per 4, o in una sola moltiplicazione, per 12; risulta 2604 dodicesimi, che si pone sopra 217; si divide 2604 per 167, risulta $\frac{99}{167}$ 15 per la divisione cercata. Se poi si divide 167 per la scomposizione di 2604, risulta $\frac{1\ 5\ 6\ 1}{2\ 6\ 7\ 31}$, come divisione di $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ 13 per 217, come mostrato nella figura.

La divisione di 323 per $\frac{1}{9}$ $\frac{5}{6}$ 14.

269	5814
$\frac{1}{9}\frac{5}{6}$ 14	323
$\frac{165}{269}$ 21	

269	5814
$\frac{1}{9}\frac{5}{6}$ 14	323
$\frac{1\ 8\ 14\ 0}{2\ 9\ 17\ 19}$	

Ancora, se si vuole dividere 323 per $\frac{1}{9}$ $\frac{5}{6}$ 14, sebbene si possa eseguire questa divisione con il metodo precedente, mostreremo in che modo si possono semplificare i denominatori che hanno fattori in comune. Prima si scrive il problema, poi si moltiplica il 14 per i suoi denominatori, semplificando così: si moltiplica il 14 per il 6, e si addiziona il 5, risulta 89 sesti, che si moltiplica per un terzo di 9, in virtù del fattore in comune 3, che la scomposizione del 6 ha con quella del 9; risulta 267 diciottesimi, al quale si addiziona il prodotto dell'1, che è a numeratore del 9, per un terzo di 6 che è a denominatore, cioè per 2; risulterà 269 diciottesimi; oppure, con un altro metodo, si addiziona $\frac{5}{6}$ a $\frac{1}{9}$; risulta $\frac{17}{18}$; perciò, si moltiplica il 14 per il 18 e si addiziona il 17; risulta 269 diciottesimi, che si scrive sopra $\frac{1}{9}$ $\frac{5}{6}$ 14; si moltiplica 323 o per 6 e per un terzo di 9, o per 9 e per un terzo di 6, in virtù del loro fattore in comune; perciò, si moltiplica ancora 323 per 18; risulta 5814 diciottesimi che si scrive sopra il 323; poi si divide 5814 per 269; risulta $\frac{165}{269}$ 21, per la divisione richiesta. Invece, se si divide 269 per la scomposizione di 5814, si trova $\frac{1\ 8\ 14\ 0}{2\ 9\ 17\ 19}$, per la divisione di $\frac{1}{9}$ $\frac{5}{6}$ 14 per 323, come mostrato in figura.

La divisione di 1357 per $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 83.

Se poi si vuole dividere 1357 per $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 83, si scrivono i numeri, e si moltiplica 83 per le sue parti frazionarie; risulta 5027 sessantesimi. Si scrive dunque il 5027 sopra $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 83, e si fa la verifica in base a quanto abbiamo mostrato nella moltiplicazione per le parti. Il residuo della

prova per 7 è 1, come deve essere, e si scrive sopra il 5027; poi si moltiplica il 1357 per i denominatori davanti all'83, cioè per 3, per 4 e per 5, o, in una sola moltiplicazione, per 60; risulta 81420 sessantesimi, che si scrive sopra il 1357. E sopra di esso si scrive il suo residuo di 7, che è 3; poi si divide 81420 per la scomposizione di 5027, che è $\frac{1\ \ 0}{11\ 457}$; il quoziente della divisione richiesta risulterà $\frac{9\ \ 89}{11\ 457}$ 16; per cui, se si moltiplica questo per $\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ 83, risulterà lo stesso 1357; il residuo di 7 del dividendo è 3, come quello di 81420; e se si divide 5027 per la scomposizione di 81420, si ottiene $\frac{5\ \ 7\ 14\ \ 3}{6\ 10\ 23\ 59}$ per la divisione di $\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ 83 per 1357; il residuo di 7 del dividendo è 1, come quello di 5027; e così si deve intendere per i residui di qualsiasi divisione simile.

La divisione di 2456 per $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{5}{6}$ 15.

Proponiamo un'altra divisione di questo tipo, con tre frazioni che hanno tra loro un fattore in comune, in modo che si comprenda meglio il metodo per semplificare; se si vuole dividere 2456 per $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{5}{6}$ 15, scritto il problema, si moltiplica il 15 per la sua parte frazionaria, semplificando così: si moltiplica il 15 per il 6, e si addiziona il 5; risulta 95 sesti, che si moltiplica per un terzo di 9 al denominatore, in virtù del fattore in comune 3, che il 9 ha con il 6; risulta 285 diciottesimi, che si moltiplica per 5, che è la metà di 10, perché 2 è fattore comune di 10 e di 6; risulta 1425 novantesimi. Poi si moltiplica il 2 che sta sopra il 9 di due noni, per 10; risulta 20 novantesimi, che non occorre moltiplicare per 6, perché il 6 è interamente contenuto nelle scomposizioni di 9 e di 10. Infatti, la scomposizione di 6 è $\frac{1\ 0}{2\ 3}$, di cui $\frac{1}{2}$ è nella scomposizione di 10 che è $\frac{1\ 0}{2\ 5}$, e $\frac{1}{3}$ è nella scomposizione di 9 che è $\frac{1\ 0}{3\ 3}$; poi si moltiplica l'1 che sta sopra il 10 per il 9; risulta 9 novantesimi, che non occorre moltiplicare per 6, in virtù dei suddetti fattori in comune. Perciò, si addizionano i 9 novantesimi trovati con i 20 novantesimi e con i 1425 novantesimi; risulterà 1454 novantesimi, il cui residuo di 7 è 5. Si scrive il 1454 sopra il 15 e le sue frazioni, e si scrive sopra il 5 come residuo. I novantesimi di $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{5}{6}$ 15, si possono ottenere in un altro modo; prima però bisogna spiegare perché devono essere calcolati i novantesimi: si calcolano perché le parti di $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{5}{6}$ sono integralmente nel 9, che è il numero più piccolo nel quale si trovano tutte queste frazioni; perciò, si moltiplica il 15 per il 90; risulta 1350, al quale si addizionano $\frac{1}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{5}{6}$ di 90, che sono 104 novantesimi; risulterà 1454 novantesimi; dopo si calcolano i novantesimi di 2456; risultano 221040 novantesimi, che si scrivono sopra 2456, e si divide 221040 per la scomposizione di 1454; risulta $\frac{0\ 16}{2\ 727}$ 152 per la divisione richiesta. E se si divide 1454 per la

1454	221040
$\frac{1}{10}\frac{2}{9}\frac{5}{6}15$	2456
$\frac{6\ 1\ \ 0\ \ 2}{8\ 9\ 10\ 307}$	

scomposizione di 221040, si ottiene la divisione di $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{5}{6}$ 15 per 2456. Questa divisione è $\frac{6\ 1\ 0\ 2}{8\ 9\ 10\ 307}$, come mostrato nel problema.

Qui inizia la quarta parte sull'addizione, sottrazione e divisione di numeri interi con frazioni.

Qualora si volesse addizionare un qualunque numero con una o più frazioni con un qualunque altro numero con una o più frazioni, ovvero sottrarre il minore tra loro con la sua o le sue frazioni dal maggiore con la sua o le sue frazioni, ovvero dividere uno qualunque dei due per l'altro, si scrive il numero minore con la sua o le sue frazioni nella parte destra della tavola, ed il maggiore con le sue frazioni sulla stessa linea verso sinistra, come abbiamo mostrato prima; quindi, si moltiplica il numero minore per le sue parti frazionarie, come più sopra abbiamo insegnato, e si moltiplica il prodotto per tutti i numeri che si trovano sotto la frazione o le frazioni del numero maggiore. Si scrive il prodotto della moltiplicazione sopra il suddetto numero minore. Poi si moltiplica il numero maggiore per la sua o le sue parti frazionarie e per tutti i numeri che sono sotto la frazione o le frazioni del numero minore. Si scrive il prodotto sopra il medesimo numero maggiore. Poi, se si vuole addizionare, si addizionano i numeri trovati e si divide la somma per tutte le parti frazionarie poste, e si ottiene la loro addizione. E se si vuole sottrarre il minore dal maggiore, si sottrae il numero trovato e scritto sopra il minore dal numero trovato e scritto sopra il maggiore, e similmente si divide la differenza per tutte le frazioni, e si ottiene la differenza che c'è tra il maggiore e il minore. E se si vuole dividere il maggiore per il minore, si divide il numero maggiore trovato per il numero minore trovato. E se si vuole dividere il minore per il maggiore, si divide il numero minore trovato per il numero maggiore trovato, e così si ottiene il risultato di qualsivoglia loro divisione. E affinché ciò s'intenda più chiaramente, ci proponiamo di mostrare caso per caso, numericamente.

L'addizione di $\frac{1}{3}$ 12 e $\frac{3}{4}$ 126.

1521	148
$\frac{3}{4}$ 126	$\frac{1}{3}$ 12
$\frac{1}{12}$	139

Se si vuole addizionare $\frac{1}{3}$ 12 e $\frac{3}{4}$ 126, si scrivono i numeri come mostrato, e si moltiplica il 12 per la sua frazione; risulta 37 terzi che si moltiplica per il 4 che è al denominatore davanti a 126; risulta 148 dodicesimi, che si scrive sopra $\frac{1}{3}$ 12; poi si moltiplica il 126 per la sua frazione; risulta 507 quarti, che si moltiplica per il 3 che sta al denominatore davanti al 12; risulta 1521 dodicesimi, che si scrive sopra $\frac{3}{4}$ 126; si addizionano i 148 dodicesimi ai 1521 dodicesimi; risultano 1669 dodicesimi, che si dividono per entrambi i denominatori, vale a dire per 3 e per 4, o in una sola divisione, per 12; il quoziente sarà $\frac{1}{12}$ 139, come mostrato nel problema.

Sulla stessa.

Si può ottenere questa stessa addizione in un altro modo, addizionando gli interi, cioè il 12 con il 126; risulta 138; poi si addizionano le frazioni, vale a dire $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$, come abbiamo mostrato nella prima parte di questo capitolo; risulta $\frac{1}{12}$ 1, che si addiziona al 138; risulta $\frac{1}{12}$ 139, come abbiamo calcolato per l'addizione scritta sopra.

La sottrazione di $\frac{1}{3}$ 12 e 3/4 126.

1521 148
$\frac{3}{4}$ 126 $\frac{1}{3}$ 12
$\frac{5}{12}$ 114

Se poi si vuole sottrarre $\frac{1}{3}$ 12 e $\frac{3}{4}$ 126, scritto il problema come sopra, si trovano il 148 e il 1521 scritti precedentemente; si sottrae il 148 dal 1521; rimane 1373, che, in base al metodo descritto, si divide per 12; risulta $\frac{5}{12}$ 114, come differenza della suddetta sottrazione, come si vede nel problema.

O, altrimenti, si sottrae l'intero dall'intero, vale a dire 12 da 126; rimane 114; poi si sottrae $\frac{1}{3}$ da $\frac{3}{4}$; rimane $\frac{5}{12}$, che si addiziona a 114; risulterà similmente $\frac{5}{12}$ 114. E se si vuole dividere $\frac{3}{4}$ 126 per $\frac{1}{3}$ 12, si divide 1521 con la scomposizione di 148, che è $\frac{1\ 0}{4\ 37}$; risulterà $\frac{1\ 10}{4\ 37}$ 10 per la divisione richiesta, come mostrato nella figura.

1521 148
$\frac{3}{4}$ 126 $\frac{1}{3}$ 12
$\frac{1\ 10}{4\ 37}$ 10

Ancora, se si vuole dividere il numero minore per il maggiore, vale a dire $\frac{1}{3}$ 12 per $\frac{3}{4}$ 126, si divide il 148 per la scomposizione di 1521, che è $\frac{1\ 0\ 0}{9\ 13\ 13}$; risulterà $\frac{4\ 3\ 1}{9\ 13\ 13}$ di un intero per la divisione richiesta.

1521 148
$\frac{3}{4}$ 126 $\frac{1}{3}$ 12
$\frac{4\ 3\ 1}{9\ 13\ 13}$

L'addizione di $\frac{3}{4}$ 13 e $\frac{2}{5}$ 171.

Se si vuole addizionare $\frac{3}{4}$ 13 e $\frac{2}{5}$ 171, si scrivono i numeri come abbiamo detto, e si moltiplica il 13 per il 4, e si addiziona il 3 che sta sopra il 4; risulta 55 quarti, che si moltiplica per il 5 che sta sotto la linea di frazione davanti al 171; risulta 275 ventesimi, che si scrive sopra $\frac{3}{4}$ 13; si moltiplica il 171 per la sua parte frazionaria, vale a dire per 5, e si addiziona il 2; risulta 857 quinti, che si moltiplica per il 4 che sta sotto la linea di frazione davanti a 13; risulta 3428 ventesimi, che si porre sopra $\frac{2}{5}$ 171; poi si addiziona 275 con 3428; risulta 3703 ventesimi, che si divide per le parti frazionarie, cioè per il 4 e i 5 che sono sotto le linee di frazione davanti ai due numeri; risulterà $\frac{1\ 1}{2\ 10}$ 185 per l'addizione richiesta.

3428 275
$\frac{2}{5}$ 171 $\frac{3}{4}$ 13
$\frac{1\ 1}{2\ 10}$ 185

La verifica dell'addizione precedente.

Per verificare se l'addizione è corretta, si esegue la prova del 7; si moltiplica il residuo di 13, che è 6, per 4, e si addiziona il 3 che sta sopra il 4; risulta 27, il cui residuo, che è 6, si moltiplica per il 5 che sta a denominatore; risulta 30, il cui residuo, che è 2, è il residuo di 275. Similmente, si trova il

residuo di 3428, attraverso i numeri che lo generano. Si moltiplica il residuo di 171, che è 3, per il 5 che sta sotto la linea di frazione, e si addiziona il 2 che sta sopra il 5; risulta 17, il cui residuo, che è 3, si moltiplica per il 4 che sta sotto la linea di frazione; risulterà 12, il cui residuo, che è 5, deve essere il residuo di 3428; e poiché sappiamo di aver proceduto correttamente quando abbiamo ottenuto questo 3428, si pone questo residuo sopra 3428; poi si addiziona il residuo di 275, che è 2, al residuo di 3428, che è 5; risulterà 7, il cui residuo, che è 0, è il residuo del risultato dell'addizione.

Sulla stessa addizione.

Si può calcolare in un altro modo l'addizione scritta sopra, cioè addizionando 13 a 171; risulta 184; e se si addiziona $\frac{3}{4}$ a $\frac{2}{5}$, si ha $\frac{1\ 1}{2\ 10}$ 1, che si addiziona a 184; risulterà $\frac{1\ 1}{2\ 10}$ 185, come è già stato calcolato per questa addizione.

La sottrazione di $\frac{3}{4}$ 13 da $\frac{2}{5}$ 171.

$\frac{2}{5}$ 171 $\frac{3}{4}$ 13
$\frac{1\ 6}{2\ 10}$ 157

Se si vuole sottrarre $\frac{3}{4}$ 13 da $\frac{2}{5}$ 171, si sottrae 275 da 3428, resta 3153 che si divide per le parti frazionarie; risulta $\frac{1\ 6}{2\ 10}$ 157 come differenza della sottrazione richiesta. Si verifica con la prova del 7 se questa differenza è corretta, così: si sottrae il residuo di 275, che è 2, dal residuo di 3428, che è 5; la differenza, che è 3, è il residuo di $\frac{1\ 6}{2\ 10}$ 157. Si può sottrarre $\frac{3}{4}$ 13 da $\frac{2}{5}$ 171 in un altro modo, cioè sottraendo $\frac{3}{4}$ 13 da 171; rimane $\frac{1}{4}$ 157 al quale si addiziona $\frac{2}{5}$; risulta $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ 157, che è $\frac{1\ 6}{2\ 10}$ 157.

La divisione di $\frac{2}{5}$ 171 per $\frac{3}{4}$ 13.

$\frac{2}{5}$ 171 $\frac{3}{4}$ 13
$\frac{3\ 0\ 5}{5\ 5\ 11}$ 12

E se si vuole dividere $\frac{2}{5}$ 171 per $\frac{3}{4}$ 13, si divide 3428 per la scomposizione di 275, che è $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 5\ 11}$; risulta $\frac{3\ 0\ 5}{5\ 5\ 11}$ 12 per la divisione richiesta, il cui residuo per 7 deve essere 5, come lo è del 3428 che viene diviso. E se si vuole dividere $\frac{3}{4}$ 13 per $\frac{2}{5}$ 171, si divide 275 per la scomposizione di 3428, che è $\frac{1\ 0}{4\ 857}$; risulta $\frac{3\ 67}{4\ 857}$ di un intero, il cui residuo per 7 è 2, come lo era di 275.

L'addizione di $\frac{5}{6}$ 14 e $\frac{2}{9}$ 231.

2	7
4162	267
$\frac{2}{9}$ 231	$\frac{5}{6}$ 14
3	2
$\frac{1\ 0}{2\ 9}$ 256	

Se si vuole addizionare $\frac{5}{6}$ 14 e $\frac{2}{9}$ 231, si scrive il problema, e lo si risolve con uno dei metodi visti sopra. Tuttavia, dal momento che 6 e 9 hanno un fattore in comune, indicheremo in che modo questa operazione debba essere semplificata. Si moltiplica il 14 per il 6 e si addiziona il 5; risulta 89 sesti, che si moltiplica per 3, cioè per la terza parte di 9, in virtù

del fattore in comune che il 6 ha con il 9; risulta 267 ventottesimi, che si pone sopra $\frac{5}{6}$ 14, e si verifica con la prova che si vuole; il suo residuo per 13 è 7, che si pone sopra il 267; poi si moltiplica 231 per 9 e addiziona il 2; risulta 2081 noni, che si moltiplica per la terza parte di 6, cioè per 2; risulta 4162 diciottesimi, che si pone sopra $\frac{2}{9}$ 231, e sopra di esso si pone anche il suo residuo per 13, che è 2; poi si addiziona 267 a 4162; risulta 4429, che si divide per una qualunque delle parti frazionarie e per il fattore non comune dell'altra, cioè o per 6 e per un terzo di nove, cioè per 3, o per 9 e per un terzo di 6, cioè per 2; risulta $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ 246 per l'addizione richiesta, il cui residuo per 13 è 9, che risulta dall'addizione del residuo di 267, che è 7, e di 4162, che è 2. E affinché ciò sia capito meglio, si dividono il 6 e il 9 per il loro fattore comune, vale a dire per 3; risultano 2 e 3; si pone il 2 sotto il 6 e il 3 sotto il 9, e si moltiplica l'89 calcolato per il 3 posto sotto il 9, e il 2081 per il 2 posto sotto il 6, e si ottengono i numeri scritti prima, la somma dei quali si divide per uno dei numeri che sono sotto le linee di frazione e per il numero posto sotto l'altra, vale a dire per 6 e per 3, oppure per 9 e per 2. Si può addizionare in altro modo $\frac{5}{6}$ 14 e $\frac{2}{9}$ 231; si addiziona 14 con 231, risulta 245; poi si addiziona $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{9}$; risulta $\frac{1}{18}$ 1, che si addiziona a 245; risulterà $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ 246, come è stato calcolato con il metodo precedente.

La sottrazione di $\frac{5}{6}$ 14 da $\frac{2}{9}$ 231.

E se si vuole sottrarre $\frac{5}{6}$ 14 da $\frac{2}{9}$ 231, si sottrae 267 da 4162; rimane 3895, il cui residuo per 13 è 8, che si trova così: dal momento che non si può sottrarre 7, che è il residuo di 267, dal residuo di 4162, cioè da 2, si addiziona il modulo 13 al 2, e si ha 15, da cui si sottrae il suddetto 7; rimane 8 come residuo di 3895, come abbiamo detto; si divide pertanto 3895 con $\frac{1\ 0}{2\ 9}$, in base alla regola sopra descritta, risulta $\frac{1\ 3}{2\ 9}$ 216 come differenza della suddetta sottrazione.

Altrimenti si sottrae il 14 da $\frac{2}{9}$ 231; rimane $\frac{2}{9}$ 217, da cui si sottrae $\frac{5}{6}$; dal momento che non si può sottrarre $\frac{5}{6}$ da $\frac{2}{9}$, si sottrae $\frac{5}{6}$ da $\frac{2}{9}$ 1, e rimarrà 216 del 217. Trasformando in diciottesimi, rimangono $\frac{7}{18}$, che addizionati a 216, danno $\frac{1\ 3}{2\ 9}$ 216, come calcolato sopra.

La divisione di $\frac{2}{9}$ 231 per $\frac{5}{6}$ 14.

Se si vuole dividere $\frac{2}{9}$ 231 per $\frac{5}{6}$ 14, si divide 4162 per la scomposizione di 267; risulta $\frac{1\ 52}{3\ 89}$ 15 per la divisione richiesta.

La divisione di $\frac{5}{6}$ 14 per $\frac{2}{9}$ 231.

Se si vuole dividere $\frac{5}{6}$ 14 per $\frac{2}{9}$ 231, si divide 267 per la scomposizione di 4162; risulta $\frac{1\ 133}{2\ 2081}$ per la divisione richiesta.

L'addizione di $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 15 e $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322.

Se si vuole addizionare $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 15 e $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322, si scrivono i numeri come qui mostrato; si moltiplica il 15 per le sue parti frazionarie, cioè per 3 e si addiziona 1; si moltiplica per 4 e si addiziona la moltiplicazione di 1 che è sopra il 4 per il 3; risulta 187 dodicesimi, che si moltiplica per i numeri che sono sotto le linee di frazione davanti al 322, cioè per 5 e per 7; risulta 6545 quattrocentoventesimi, che si pone sopra $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 15; poi si moltiplica il 322 per le sue parti frazionarie; risulta 112296 trecentocinquesimi, che si moltiplica per i numeri che sono sotto le linee di frazione davanti al 15; risulta 135552 quattrocentoventesimi, che si pone sopra $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322; poi si addiziona 6545 a 135552; risulta 142097 quattrocentoventesimi; si divide 142097 per 420, cioè per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione, e sistemandoli risulterà $\frac{5\ 1\ 3}{6\ 7\ 10}$ 338 per l'addizione richiesta, il cui residuo per 11 è 10. Secondo un altro metodo, si addiziona 15 a 322; risulta 337; si addiziona $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$, secondo il metodo che abbiamo visto nella seconda parte di questo capitolo; risulta $\frac{5\ 1\ 3}{6\ 7\ 10}$ 1, che si addiziona a 337; risulta $\frac{5\ 1\ 3}{6\ 7\ 10}$ 338, come abbiamo visto prima.

La sottrazione di $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 15 da $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322.

Se si vuole sottrarre $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 15 da $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322, si sottrae 6545 da 135552; rimane 129007 che si divide, in base alla dimostrazione descritta prima, con $\frac{1\ 0\ 0}{6\ 7\ 10}$; risulta $\frac{1\ 4\ 1}{6\ 7\ 10}$ 307 come differenza della suddetta sottrazione.

Secondo un altro metodo, si sottrae il 15 dal 332; rimane 307; si sottrae $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ da $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$; rimane $\frac{1\ 4\ 1}{6\ 7\ 10}$, che si addiziona a 307; risulta $\frac{1\ 4\ 1}{6\ 7\ 10}$ 307, come abbiamo visto prima. Se si vuole dividere $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322 per $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 15, si divide 135552 per la scomposizione in fattori di 6545; risulta $\frac{2\ 6\ 0\ 12}{6\ 7\ 11\ 17}$ 20 per la divisione richiesta.

La divisione di $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ 15 per $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322.

Se si vuole dividere $\frac{1}{4}$ 1/3 $\frac{1}{3}$ 15 per $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$ 322, si divide 6545 per la scomposizione di 135552; risulta $\frac{5\ 2\ 0\ 17}{6\ 8\ 8\ 353}$ per la divisione richiesta. E così, in base al metodo sopra scritto, si può addizionare, sottrarre e dividere

qualsiasi numeri con due frazioni. Tuttavia mostreremo alcuni problemi in cui si può semplificare qualche frazione, per la comunanza dei fattori.

L'addizione di $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ *16 e* $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ *422.*

Se si vuole addizionare $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ 16 e $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ 422, una volta scritti i numeri, si moltiplica prima il 16 per le sue parti frazionarie; risulta 339 ventesimi che si moltiplica solo per 9, a causa dell'altro 5 che è sotto la frazione davanti a $\frac{3}{4}$ 16; risulta 3051 centottantesimi, che si pone sopra $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ 16; poi si moltiplica 442 per le sue frazioni; risulta 19931 quarantacinquesimi, che si moltiplica solo per il 4, che sta sotto la frazione davanti al 16, tralasciando di moltiplicare per 5 per la suddetta ragione; risulterà similmente 79724 centottantesimi, che si pone sopra $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ 422; poi si addiziona 3051 a 79724; risulta 82775 centottantesimi, che si divide per 180, o per tutti i numeri che sono sotto le frazioni, tranne che per uno dei due 5, poiché, come si è tralasciato un cinque nella moltiplicazione di uno dei due numeri dati, così si deve tralasciare un cinque nella divisione della loro somma; dunque, si divide 882775 con $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 5\ 9}$, e si cancella $\frac{1}{5}$; risulta $\frac{3\ 7}{4\ 9}$ 459 per l'addizione richiesta.

Oppure si possono addizionare l'intero, l'intero, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{9}$, come abbiamo insegnato nei paragrafi precedenti, e si ottiene similmente il risultato di tale addizione.

La sottrazione di $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ *16 da* $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ *442.*

Se si vuole sottrarre $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ 16 da $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ 442, si sottrae 3051 da 79724; rimane 76673, che si divide con $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 9\ 10}$; risulta $\frac{1\ 5\ 9}{2\ 9\ 10}$ 425 come differenza della sottrazione richiesta; oppure si sottrae $\frac{1}{5}$ 16 da $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ 442; rimane $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ 426; poi si sottrae $\frac{3}{4}$ da $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ se possibile; ma poiché non è possibile, si sottrae $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ 1 da $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ 426; rimane 425; poi si sottrae $\frac{3}{4}$ dal suddetto $\frac{1}{9}\ \frac{3}{5}$ 1; rimane $\frac{1\ 5\ 9}{2\ 9\ 10}$ 425 come differenza.

Ancora, se si vuole dividere $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ 422 per $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ 16, si divide 79724 per la scomposizione di 3051; risulta $\frac{2\ 6\ 14}{3\ 9\ 113}$ 26 per la divisione richiesta. E se si vuole dividere $\frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$ 16 per $\frac{1}{9}\ \frac{4}{5}$ 442, si divide 3051 per la scomposizione di 79724; risulterà $\frac{3\ 762}{4\ 19931}$ come quoziente della divisione richiesta.

L'addizione di $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ 17$ e $\frac{1}{10}\ \frac{7}{9}\ 523$.

Se si vuole addizionare $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ 17$ e $\frac{1}{10}\ \frac{7}{9}\ 523$, scritto il problema, si moltiplica il 5 e il 6 che stanno sotto le frazioni; risulta 30; poi si moltiplica il 9 e il 10 che stanno sotto le altre frazioni dall'altro lato; risulta 90. Si tiene il 30 nella mano destra e il 90 nella mano sinistra, e si dividono per il loro massimo fattore comune, che è 30; risultano 1 nella mano destra e 3 nella mano sinistra. Si scrivi dunque l'1 sotto $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}$ e il 3 sotto $\frac{1}{10}\ \frac{7}{9}$, come nel problema; poi si moltiplica il 17 per le sue parti frazionarie; risulta 527 trentesimi, che si moltiplica per il 3 posto sotto $\frac{1}{10}\ \frac{7}{9}$; risulta 1581 novantesimi, che si pone sopra $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ 17$; poi si moltiplica il 523 per le sue parti frazionarie, e si addiziona il prodotto a 1581; risulta 48730, che si divide per i numeri che sono a denominatore da un lato e per i numeri che sono a denominatore dall'altro lato, cioè per 5, per 6 e per 3, o per 9, per 10 e per 1, e cioè per 90, perché il risultato è espresso in novantesimi; il quoziente della divisione richiesta risulta $\frac{4}{5}\ 541$; questo metodo si usa in tutti i casi simili perché è più sicuro e migliore di altri.

E se si vuole sottrarre $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ 17$ da $\frac{1}{10}\ \frac{7}{9}\ 523$, si sottrae 1581 da 47149, e si divide la differenza, che è 45568, con $\frac{1\ 0}{9\ 10}$; risulta $\frac{4\ 2}{5\ 9}\ 506$ come differenza della suddetta sottrazione. Oppure, si sottrae il 17 dal 523; rimane 506; e si sottrae $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}$ da $\frac{1}{10}\ \frac{7}{9}$; rimane $\frac{4\ 2}{5\ 9}$, come abbiamo detto prima.

La divisione di $\frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ 523$ per $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ 17$.

E se si vuole dividere $\frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ 523$ per $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ 17$, si divide 47149 per 1581. E se si divide 1581 per 47149, si ottiene la divisione di $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ 17$ per $\frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ 523$, come nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato caso per caso.

Qui inizia la parte quinta sull'addizione, sottrazione e divisione di parti di numeri interi e frazioni.

	10	8
	115400	27783
	$\frac{2}{9}\ 128\ \frac{5}{7}$	$\frac{2}{5}\ 29\ \frac{3}{4}$
Add.	$\frac{1\ 2\ 3\ 6}{2\ 7\ 9\ 10}$	113
Sottr.	$\frac{1\ 2\ 3\ 5}{2\ 7\ 9\ 10}$	69

Se si vuole addizionare $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{5}\ 29$ e $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{9}\ 128$, si scrivono i numeri come qui mostrato e si moltiplica il 29 per il 5, e si addiziona il 2; risulta 147, che si moltiplica per il 3 che sta sopra il 4; risulta 441 che si moltiplica per il 7 e per il 9 che stanno sotto le frazioni dell'altro numero; risulta 27783 che si pone sopra $\frac{2}{5}\ 29\ \frac{3}{4}$, il cui residuo di 11 è 8, che si trova in base a ciò che abbiamo moltiplicato; poi si moltiplica il 128 per il 9, e si addiziona il 2; poi si moltiplica per il 5 che sta sopra il 7; risulta 5770, che si moltiplica per il 5 e per il 4, che stanno sotto le frazioni dell'altro numero; risulta 115400, che si pone sopra $\frac{2}{9}\ 128\ \frac{5}{7}$, il cui residuo di 11 è 10; si

addiziona quindi 27783 a 115400; risulta 143183 che si divide per tutte le parti frazionarie, vale a dire con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 5\ 7\ 9}$; risulterà $\frac{1\ 2\ 3\ 6}{2\ 7\ 9\ 10}$ 113 per l'addizione richiesta.

La sottrazione di $\frac{2}{5}$ *29* $\frac{3}{4}$ *da* $\frac{2}{9}$ *128* $\frac{5}{7}$.

Se si vuole sottrarre $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{3}{4}$ da $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$, si sottrae 27733 da 115400, resta 87617 che similmente si divide con $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 9\ 10}$; risulterà $\frac{1\ 2\ 3\ 5}{2\ 7\ 9\ 10}$ 69 come differenza della suddetta sottrazione.

La divisione di $\frac{2}{9}$ *128* $\frac{5}{7}$ *per* $\frac{2}{5}$ *29* $\frac{3}{4}$.

Ancora, Se si vuole dividere $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{3}{4}$, trovati i suddetti numeri, vale a dire 27783 e 115400, si trova la scomposizione di 27783, che è $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{7\ 7\ 7\ 9\ 9}$, e si divide con essa il 115400; risulterà $\frac{5\ 0\ 3\ 3\ 1}{7\ 7\ 7\ 9\ 9}$ 4 come quoziente della divisione richiesta. E ancora, se si vuole dividere $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$, si divide 27783 per la scomposizione di 115400; risulterà $\frac{1\ 1\ 9\ 138}{2\ 10\ 10\ 577}$ per la divisione richiesta.

L'addizione di $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ *33* $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$ *e* $\frac{1}{11}$ $\frac{5}{6}$ *244* $\frac{1\ 3}{4\ 7}$.

0	7
3152175	884488
$\frac{1}{11}$ $\frac{5}{6}$ 244 $\frac{1\ 3}{4\ 7}$	$\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33 $\frac{1\ 3}{5\ 4}$
$\frac{3\ 3\ 4\ 8\ 6}{4\ 7\ 9\ 10\ 11}$ 145	

Se si vuole addizionare $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33 $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{11}$ $\frac{5}{6}$ 244 $\frac{1\ 3}{4\ 7}$, si scrivono i numeri come mostrato; si moltiplica il 33 per il 9, e si addiziona il 5 che sta sopra il 9; si moltiplica per il 7 e si addiziona il 2; risulta 2116 sessantatreesimi. Poi si moltiplica il 3 che sta sopra il 4 per il 5, e l'1 che sta sopra il 5 per il 4, e si addizionano assieme; risulta 19 ventesimi, che si moltiplica per i 2116 sessantatreesimi trovati; risulta 40204 milleduecentosessantesimi, il cui residuo di 13 è 8; si deve moltiplicare 40204 per tutti i denominatori che sono dall'uno e dall'altro lato, vale a dire per 7 e per 4, che sono sotto la prima frazione di quel lato e per 6 e per 11; tuttavia, si tralascia di moltiplicare per 7 e per 4, perché il 7 e il 4 sono sotto le frazioni del primo lato; e si tralascia di moltiplicare per il 3 che è nella scomposizione del 6, e del 9 che è sotto la linea di frazione del primo lato. Dunque si moltiplica 40204 per il 2 che rimane del suddetto 6 e per l'11, cioè, in una sola moltiplicazione, per 22; risulta 884488 ventisettemilasettecentoventesimi, che si pone sopra $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33 $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$, scrivendo sopra il loro residuo, che è 7. Poi si moltiplica il 244 per il 6 che sta sotto la frazione, e si addiziona il 5 che sta sopra il 6; risulta 1469 sesti, che si moltiplica per 11, e si addiziona il prodotto della moltiplicazione dell'1, che sta sopra l'11, per il 6; risulta 16165 sessantaseiesimi, il cui residuo di 13 è 6. Poi si moltiplica il 3 che sta sopra il 7 per il 4, e si addiziona l'1 che sta sopra il 4; risulta 13 ventottesimi, che si moltiplica per 16165 sessantaseiesimi; risulta 210145 milleottocentoquarantottesimi. Questo si

deve moltiplicare per tutti i numeri che sono al denominatore del primo lato, tralasciando i soprascritti fattori comuni; restano solo il 3 della scomposizione del 9, e il 5, perciò si moltiplica per 15; risulta similmente 3152175 ventisettemilasettecentoventesimi, come risultato dell'altro lato. Questo risultato si scrive sopra $\frac{1}{11}$ $\frac{5}{6}$ 244 $\frac{1\ 3}{4\ 7}$, con il suo residuo, che è 0; poi si addiziona 884488 a 3152175; risulta 4036663, che si divide per tutti i denominatori di un lato qualunque e per le frazioni prese nella moltiplicazione dall'altro lato, cioè per 4, per 5, per 9 e per 7 del primo lato, e per il 2, che è nella scomposizione del 6, per l'11 preso nella moltiplicazione del primo numero, o per 7, per 4, per 6 e per 11, che sono nel secondo lato, e per il 3, che sta nella scomposizione del 9, e per il 5, che stanno dall'altro lato; risulterà $\frac{3\ 3\ 4\ 8\ 6}{4\ 7\ 9\ 10\ 11}$ 145 per l'addizione richiesta.

La sottrazione di $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ *33* $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$ *da* $\frac{1}{11}$ $\frac{5}{6}$ *244* $\frac{1\ 3}{4\ 7}$.

Se si vuole sottrarre $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33 $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$ da $\frac{1}{11}$ $\frac{5}{6}$ 244 $\frac{1\ 3}{4\ 7}$, o dividere uno di essi per l'altro, si trovano con il suddetto metodo e nell'ordine i suddetti 884488 e 3152175; con questi numeri si fanno i calcoli per la sottrazione e la divisione, come abbiamo spiegato prima in questo capitolo.

L'addizione di $\frac{1}{13}$ $\frac{2}{11}$ $\frac{3}{5}$ *42* $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ *e* $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ *331* $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{7}$.

Se si vuole addizionare $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ di $\frac{1}{13}$ $\frac{2}{11}$ $\frac{3}{5}$ 42 e $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{7}$ di $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ 331, si scrive il problema, e si comincia a moltiplicare il 42 per le parti frazionarie che lo precedono; risulta 30644, di cui si prendono $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$; poi si moltiplica il 5 che sta sopra il 9 per l'8, e si addiziona il 3, si moltiplica per 7, e si addiziona il 2; risulta 303, che si moltiplica per 30644; risulta 9285132, che si deve moltiplicare per tutti i numeri che stanno sotto le frazioni dell'altro lato, vale a dire per 7, per 8 e per 9, che stanno sotto le tre frazioni, e per 11, per 5 e per 3, che stanno sotto una frazione; tralasciando di moltiplicare per i numeri che ancora sono in questo primo lato, resta da moltiplicare il 9285132 soltanto per il 3; la moltiplicazione ammonta a 27855396, che si pone sopra il primo lato. Per calcolare il numero dell'altro lato, si moltiplica il 331 per le parti frazionarie dopo di esso; risulterà 54662. Si trova il numero per le altre sue tre frazioni, cioè per $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{7}$; risulta 479, per cui si moltiplica 54662; risulta 26183098. Poiché si deve moltiplicare questo numero per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione del primo lato, vale a dire per 13, per 11 e per 5 che sono sotto le tre frazioni, e per 7, per 8 e per 9 che sono sotto l'altra frazione, fra i suddetti si moltiplica solo per 13, in virtù della comunanza dei fattori che hanno le parti frazionarie di entrambi i lati. La moltiplicazione di 26183098 per 13 ammonta a 340380274, che si pone sopra il secondo lato. Poi si addiziona quest'ultimo al numero posto sopra il primo lato, vale a dire a 27855396; risulta 368235670 che si divide per tutti i numeri che sono sotto le frazioni del primo lato e per il 3 che sta sotto la frazione del secondo lato, cioè come

abbiamo moltiplicato quando abbiamo ottenuto il numero del primo lato. Oppure si divide per tutti i numeri che sono sotto le frazioni del secondo lato e per il 13 che sta sotto la frazione del primo lato, cioè come abbiamo moltiplicato quando abbiamo ottenuto il numero del secondo lato. Perciò, si divide con $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{3\ 5\ 7\ 8\ 9\ 11\ 13}$; risulterà, con gli adattamenti delle parti frazionarie, $\frac{1\ 3\ 5\ 3\ 0\ 8}{2\ 6\ 7\ 9\ 11\ 13}$ 340 per l'addizione richiesta, il cui residuo di 17 è 3.

Un'altra sottrazione.

Se si vuole sottrarre $\frac{1}{13}$ $\frac{2}{11}$ $\frac{3}{5}$ 42 $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ da $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ 331 $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{7}$, si trovano nell'ordine i suddetti 27855396 e 340380274, e si sottrae il minore di essi dal maggiore; rimane 312524878 che si divide con $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 6\ 7\ 9\ 10\ 11\ 13}$, come nella suddetta addizione; risulterà $\frac{0\ 5\ 1\ 6\ 2\ 1\ 1}{2\ 6\ 7\ 9\ 10\ 11\ 13}$ 289 come differenza della sottrazione richiesta. Se si divide 340380274 con la scomposizione di 27855396, si ottiene la divisione del numero maggiore per il minore; al contrario, si ottiene la divisione inversa. Se si vuole addizionare o $\frac{3\ 2}{5\ 9}$ e $\frac{2}{9}$, si fa terminare la stessa linea di frazione con un cerchietto dall'altra parte e si ottiene il numero cercato, cioè o $\frac{5\ 2}{5\ 9}$, che si deve trasformare in un solo numero con l'insegnamento suddetto; risulterà $\frac{16}{45}$, cioè $\frac{1\ 3}{5\ 9}$. E se si vuole sottrarre o $\frac{3\ 2}{5\ 9}$ da $\frac{2}{9}$, si sottrae o $\frac{3\ 2}{5\ 9}$ da o $\frac{5\ 2}{5\ 9}$, cioè $\frac{2}{9}$; rimane o $\frac{2\ 2}{5\ 9}$, cioè $\frac{4}{45}$; oppure si prendono i $\frac{2}{9}$ di 45; risulta 10 da cui si sottraggono i suoi $\frac{3}{5}$, cioè 6, rimane 4, che diviso per 45 risulta $\frac{4}{45}$, come differenza della suddetta sottrazione. Similmente, se si vuole sottrarre $\frac{3\ 0}{4\ 6}$ da $\frac{1}{6}$, si sottrae $\frac{3\ 0}{4\ 6}$ da $\frac{4\ 0}{4\ 6}$, cioè $\frac{1}{6}$; rimane $\frac{1\ 0}{4\ 6}$. Infatti, se da qualunque quantità si sottraggono i $\frac{3}{4}$, è necessario che resti $\frac{1}{4}$ di quella quantità. E se da una certa quantità si sottraggono i $\frac{3}{5}$, della stessa quantità restano i $\frac{2}{5}$. Per cui, se si sottrae o $\frac{3\ 4}{5\ 7}$ da $\frac{4}{7}$, resteranno o $\frac{2\ 4}{5\ 7}$ e così si deve intendere per tutti i casi simili. Similmente, se si sottrae o $\frac{4\ 5}{9\ 7}$ da $\frac{5}{7}$, resterà o $\frac{5\ 5}{9\ 7}$, vale a dire $\frac{25}{63}$, poiché se da qualunque quantità si sottraggano i $\frac{4}{9}$, è necessario che restino i $\frac{5}{9}$ di quella quantità, perché $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{9}$ formano un intero.

Qui inizia la sesta parte del settimo capitolo
sulla scomposizione delle frazioni in frazioni unitarie.

Nella prima e nella seconda parte di questo capitolo abbiamo insegnato a trasformare più frazioni in una singola frazione. In questa parte, invece, insegneremo a separare frazioni con più parti nella somma di frazioni unitarie, in modo che si possa capire per ogni frazione, a che parte o che parti di un intero corrisponda. Per questo motivo è necessario dividere

questa parte in sette sezioni, corrispondenti a ciascun tipo di frazione. La prima sezione è quando il numero maggiore, che è sotto la frazione, è divisibile per il numero minore, che sta sopra la linea di frazione. Per questo tipo di frazione, dividendo il maggiore per il minore, si ottiene la parte che il minore è del maggiore. Per esempio, se si vuole sapere che parte di un intero è $\frac{3}{12}$, si divide il 12 per il 3; risulta 4, e si dice che $\frac{1}{4}$ è la parte di un intero corrispondente a $\frac{3}{12}$. Per la stessa ragione, $\frac{4}{20}$ è $\frac{1}{5}$ di un intero; $\frac{5}{100}$ è $\frac{1}{20}$, perché 100 diviso 5 dà 20, e lo stesso si deve intendere per casi simili.

Le frazioni che appartengono alla prima sezione si dividono a loro volta in tre sottotipi di frazione, dei quali il primo è detto "semplice", il secondo "composto", il terzo "composto inverso". Il semplice è quello menzionato poco fa. Il composto è quando il semplice è riferito a parti di un altro numero, come con $\frac{2\ 0}{4\ 9}$; infatti $\frac{2}{4}$, frazione semplice del primo tipo, si riferisce ad una frazione di 9, perciò, per $\frac{2\ 0}{4\ 9}$ si ha $\frac{1\ 0}{2\ 9}$, vale a dire $\frac{1}{18}$; per $\frac{3\ 0}{9\ 10}$ si ha $\frac{1\ 0}{3\ 10}$, perché $\frac{3}{9}$, cioè $\frac{1}{3}$, composto con $\frac{1}{10}$, è $\frac{1\ 0}{3\ 10}$; e lo stesso si deve intendere in casi simili. La frazione del primo tipo composto inverso è $\frac{3\ 0}{5\ 9}$, che è inverso a $\frac{3\ 0}{9\ 5}$, che è $\frac{1\ 0}{3\ 5}$; similmente si deve intendere di $\frac{4\ 0}{7\ 8}$, che si inverte in $\frac{4\ 0}{8\ 7}$, vale a dire in $\frac{1\ 0}{2\ 7}$; e per $\frac{5\ 0}{9\ 10}$ si ottiene $\frac{5\ 0}{10\ 9}$, vale a dire $\frac{1\ 0}{2\ 9}$.

Sulla seconda sezione.

La frazione è del secondo tipo quando il numero maggiore non è divisibile per il minore, ma del minore possono essere fatte delle parti tali che il maggiore sia divisibile per ciascuna di esse. Per questo tipo di frazione si divide il numero minore in parti per le quali il maggiore possa essere diviso; poi si divide il maggiore per ciascuna di queste parti e si ottengono, una per una, le parti che il minore è del maggiore. Per esempio, si vuole dividere $\frac{5}{6}$ nella somma di parti singole di un intero; poiché il 6 non è divisibile per 5, ciò rivela che $\frac{5}{6}$ non è una frazione del primo tipo, ma poiché il 5 può essere diviso in due parti, vale a dire 3 + 2, per ciascuna delle quali il maggiore, vale a dire 6, è divisibile, si può affermare che la frazione è del secondo tipo. Per cui, si divide il 6 per 3 e per 2, e risulta 2 e 3; per il 2 si prende $\frac{1}{2}$ e per il 3 si prende $\frac{1}{3}$; dunque, $\frac{5}{6}$ corrisponde a $\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}$ di un intero, la somma di $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Oppure, si separa $\frac{5}{6}$ nella somma di $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$; in base alla regola delle frazioni di primo tipo, $\frac{3}{6}$ è $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{6}$ è $\frac{1}{3}$, per cui $\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}$ è $\frac{5}{6}$ di un intero, come prima. Similmente, se si separa $\frac{7}{8}$ nelle parti di $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{8}$, si ha $\frac{1}{2}$ per $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{4}$ per $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{8}$ per $\frac{1}{8}$, per cui risulta che $\frac{1}{8}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{2}$ è $\frac{7}{8}$; anche le frazioni che appartengono a questa seconda sezione hanno un sottotipo composto e un

sottotipo composto inverso. Una frazione composta del secondo tipo è $\frac{3\ 0}{4\ 10}$, poiché $\frac{3}{4}$ in base alla regola delle frazioni del secondo tipo corrisponde a $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$; così per $\frac{3\ 0}{4\ 10}$ si ha la somma di $\frac{1\ 0}{2\ 10}$ e $\frac{1\ 0}{4\ 10}$, cioè $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{40}$; similmente per $\frac{5\ 0}{8\ 9}$ si ha la somma di $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ e $\frac{1\ 0}{8\ 9}$, poiché $\frac{5}{8}$ corrisponde a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$; tuttavia, non si deve scomporre $\frac{5\ 0}{8\ 10}$, del primo tipo composto inverso, nella somma di $\frac{1\ 0}{2\ 10}$ e $\frac{1\ 0}{8\ 10}$, perché l'inverso è $\frac{5\ 0}{10\ 8}$, cioè $\frac{1\ 0}{2\ 8}$; questo capita per la comunanza di fattori che hanno il 5 che sta sopra l'8 e il 10. Ancora, $\frac{3\ 0}{5\ 10}$, del secondo tipo composto inverso, si inverte in $\frac{3\ 0}{10\ 5}$, cioè $\frac{1\ 0}{5\ 5}$ e $\frac{1\ 0}{10\ 5}$, cioè $\frac{1}{25}$ e $\frac{1}{50}$, perciò $\frac{3}{10}$ si riduce a $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$, e $\frac{3\ 0}{10\ 5}$ si separa in $\frac{1\ 0}{5\ 5}$ e $\frac{1\ 0}{10\ 5}$; e per $\frac{5\ 0}{7\ 8}$ si ha $\frac{5\ 0}{8\ 7}$, cioè $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ e $\frac{1\ 0}{8\ 7}$; e così si deve intendere in casi simili. E poiché nelle transazioni commerciali, sono maggiormente utili le frazioni della prima e della seconda sezione, adesso mostreremo in alcune tabelle le scomposizioni delle frazioni di alcuni numeri. Applicati a mandarle a mente se vorrai comprendere meglio quello che vogliamo dire in questa parte del capitolo.

TABELLE DI SEPARAZIONE

PARTI di 6		
1	*di 6 è*	$\frac{1}{6}$
2		$\frac{1}{3}$
3		$\frac{1}{2}$
4		$\frac{1}{6}\frac{1}{2}$
5		$\frac{1}{3}\frac{1}{2}$
PARTI di 8		
1	*di 8 è*	$\frac{1}{8}$
2		$\frac{1}{4}$
3		$\frac{1}{8}\frac{1}{4}$
4		$\frac{1}{2}$
5		$\frac{1}{8}\frac{1}{2}$
6		$\frac{1}{4}\frac{1}{2}$
7		$\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

PARTI di 12		
1	*di 12 è*	$\frac{1}{12}$
2		$\frac{1}{6}$
3		$\frac{1}{4}$
4		$\frac{1}{3}$
5		$\frac{1}{6}\frac{1}{4}$
6		$\frac{1}{2}$
7		$\frac{1}{4}\frac{1}{3}$
8		$\frac{1}{6}\frac{1}{2}$
9		$\frac{1}{4}\frac{1}{2}$
10		$\frac{1}{3}\frac{1}{2}$
11		$\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

PARTI di 20			
1 *di* 20 *è*	$\frac{1}{20}$	10	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{10}$	11	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{10}$	12	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{5}$	13	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	14	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{5}$	15	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
7	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{2}$
8	$\frac{2}{5}$	17	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
9	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}$	18	$\frac{1}{15}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$
		19	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$

PARTI di 24			
1 *di* 24 *è*	$\frac{1}{24}$	12	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{12}$	13	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	14	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{6}$	15	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{12}\,\frac{1}{8}$	16	$\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{4}$	17	$\frac{1}{12}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}$
7	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{6}$	18	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
8	$\frac{1}{3}$	19	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}$
9	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{4}$	20	$\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$
10	$\frac{1}{6}\,\frac{1}{4}$	21	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
11	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{3}$	22	$\frac{1}{6}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
		23	$\frac{1}{8}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$

PARTI di 60					
1 *di* 60 *è*	$\frac{1}{60}$	12	$\frac{1}{5}$	24	$\frac{1}{15}\,\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{30}$	13	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{6}$	25	$\frac{1}{12}\,\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{20}$	14	$\frac{1}{15}\,\frac{1}{6}$	26	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{15}$	15	$\frac{1}{4}$	27	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{12}$	16	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{6}$	28	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{10}$	17	$\frac{1}{30}\,\frac{1}{4}$	29	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{3}$
7	$\frac{1}{60}\,\frac{1}{10}$	18	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{5}$	30	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{1}{30}\,\frac{1}{10}$	19	$\frac{1}{15}\,\frac{1}{4}$	31	$\frac{1}{60}\,\frac{1}{2}$
9	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{10}$	20	$\frac{1}{3}$	35	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{3}$
10	$\frac{1}{6}$	21	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{4}$	40	$\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}$
11	$\frac{1}{60}\,\frac{1}{6}$	22	$\frac{1}{30}\,\frac{1}{3}$	50	$\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$
		23	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{3}$	55	$\frac{1}{6}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$

PARTI di 100					
1 *di* 100 *è*	$\frac{1}{100}$	10	$\frac{1}{10}$	70	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{50}$	15	$\frac{1}{20}\,\frac{1}{10}$	75	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{100}\,\frac{1}{50}$	20	$\frac{1}{5}$	80	$\frac{4}{5}$
4	$\frac{1}{25}$	25	$\frac{1}{2}$	85	$\frac{1}{10}\,\frac{3}{4}$
5	$\frac{1}{20}$	30	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{5}$	95	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{50}\,\frac{1}{25}$	35	$\frac{1}{10}\,\frac{1}{4}$	96	$\frac{1}{100}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
7	$\frac{1}{50}\,\frac{1}{20}$	40	$\frac{2}{5}$	97	$\frac{1}{50}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
8	$\frac{2}{25}$	45	$\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}$	98	$\frac{1}{100}\,\frac{1}{50}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
9	$\frac{1}{25}\,\frac{1}{20}$	50	$\frac{1}{2}$	99	$\frac{1}{25}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$
		60	$\frac{3}{5}$		

La terza sezione di separazione.

Una frazione è del terzo tipo quando il numero maggiore più uno è divisibile per il minore. La regola di questa sezione è che il numero che risulta dal maggiore più uno si divide per il minore, e ciò che risulta dalla divisione sarà la parte di un intero che è il numero minore, cui si deve aggiungere la stessa parte della parte che uno è del numero maggiore. Per esempio, vogliamo trasformare in frazioni unitarie $\frac{2}{11}$, che appartiene a questa sezione perché uno più 11, vale a dire 12, è divisibile per il 2 che sta sopra la frazione; da questa divisione risulta 6, che dà $\frac{1}{6}$, cui si addiziona la sesta parte di 11, e si ha $\frac{1\ 0}{6\ 11}$, per le frazioni unitarie di $\frac{2}{11}$. Per la stessa ragione per $\frac{3}{11}$ si ottiene un quarto e $\frac{1\ 0}{4\ 11}$, cioè $\frac{1}{44}\ \ \frac{1}{4}$. E per $\frac{4}{11}$ si ha un terzo e $\frac{1\ 0}{3\ 11}$, cioè $\frac{1}{33}\ \ \frac{1}{3}$; e per $\frac{6}{11}$ si ha un mezzo e $\frac{1\ 0}{3\ 11}$, cioè $\frac{1}{33}\ \ \frac{1}{2}$; similmente per $\frac{5}{19}$, si ha $\frac{1}{4}$ e $\frac{1\ 0}{4\ 19}$, cioè $\frac{1}{76}\ \ \frac{1}{4}$. La frazione di terzo tipo può essere anche composta da due frazioni composte, come $\frac{2\ 0}{3\ 7}$, che è $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ e $\frac{1\ 0}{6\ 7}$, poiché $\frac{2}{3}$ è $\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{2}$; similmente, $\frac{4\ 0}{7\ 9}$ è $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ e $\frac{1\ 0}{14\ 9}$, poiché $\frac{4}{7}$ è $\frac{1}{14}\ \ \frac{1}{2}$. Anche la frazione che appartiene a questa sezione può essere invertita, come $\frac{3\ 0}{7\ 11}$ o $\frac{3\ 0}{7\ 8}$; la $\frac{3\ 0}{7\ 11}$ corrisponde a $\frac{3\ 0}{11\ 7}$, che, in base alla terza sezione, diventa $\frac{1\ 0}{4\ 7}$ più $\frac{1\ 0}{44\ 7}$, poiché $\frac{3}{11}$ è $\frac{1}{44}\ \ \frac{1}{4}$; similmente $\frac{3\ 0}{7\ 8}$ si inverte in $\frac{3\ 0}{8\ 7}$, che è composta da frazioni del secondo e del terzo tipo. Come frazione di secondo tipo, $\frac{3\ 0}{8\ 7}$ è $\frac{1\ 0}{4\ 7}$ più $\frac{1\ 0}{8\ 7}$; in quanto frazione di terzo tipo, $\frac{3\ 0}{8\ 7}$ è $\frac{1\ 0}{3\ 7}$ e $\frac{1\ 0}{24\ 7}$ dal momento che per $\frac{3}{8}$ si ha $\frac{1}{24}\ \ \frac{1}{3}$; e ciò si deve intendere in casi simili.

Sulla stessa sezione.

Appartengono inoltre a questa sezione le frazioni tali che del numero minore che è sopra la linea si possono fare due parti, per le quali il maggiore più uno sia integralmente divisibile, come $\frac{8}{11}$ e $\frac{9}{11}$; $\frac{8}{11}$ è scomponibile in due parti, $\frac{6}{11}$ e $\frac{2}{11}$; per $\frac{6}{11}$ abbiamo, in base a questa regola due parti unitarie, $\frac{1}{22}\ \ \frac{1}{2}$; e per $\frac{2}{11}$ abbiamo $\frac{1}{66}\ \ \frac{1}{6}$; dunque, per $\frac{8}{11}$ abbiamo $\frac{1}{66}\ \ \frac{1}{22}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{2}$; similmente per $\frac{9}{11}$, che si scompone in $\frac{6}{11}$ e $\frac{3}{11}$, abbiamo $\frac{1}{44}\ \ \frac{1}{22}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{2}$; per $\frac{10}{11}$ si ottiene $\frac{1}{33}\ \ \frac{1}{22}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}$.

Sulla quarta sezione di separazione.

Una frazione è di quarto tipo quando il numero maggiore è un numero primo, che addizionato ad uno risulta divisibile per il minore diminuito di uno, come $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{11}$. La regola di questa sezione è che si sottrae uno dal numero minore, e di ciò si fa una frazione unitaria, cioè con il numero che è

sotto la linea di frazione, e allora resteranno frazioni della terza sezione. Così se da $\frac{5}{11}$ si sottrae $\frac{1}{11}$, resterà $\frac{4}{11}$, per la quale, in quanto frazione di terzo tipo, si hanno le frazioni unitarie $\frac{1}{33}\ \frac{1}{3}$, ed aggiungendo il soprascritto $\frac{1}{11}$, si ha $\frac{1}{33}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{3}$; per lo stesso motivo, per $\frac{7}{11}$ si ha $\frac{1}{22}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{2}$; per $\frac{3}{7}$ si ha $\frac{1}{28}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{4}$; per $\frac{6}{19}$ si ha $\frac{1}{76}\ \frac{1}{19}\ \frac{1}{4}$; per $\frac{7}{29}$ si ha $\frac{1}{145}\ \frac{1}{29}\ \frac{1}{5}$.

Sulla quinta sezione.

Una frazione è di quinto tipo quando il numero maggiore è pari e divisibile per il minore meno 2. La regola di questa sezione è che dal numero minore si sottrae 2, il quale 2 dà una frazione della prima sezione, e la differenza poi dà una frazione di terzo tipo; come $\frac{11}{26}$, da cui si sottrae $\frac{2}{26}$, cioè $\frac{1}{13}$, in base alla regola della prima sezione; rimane $\frac{9}{26}$, che corrisponde a $\frac{1\ 0}{3\ 26}\ \frac{1}{3}$, cioè $\frac{1}{78}\ \frac{1}{3}$, che più $\frac{1}{13}$ diventa $\frac{1}{78}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{3}$, come frazione unitaria di $\frac{11}{26}$; similmente, da $\frac{11}{62}$ si ha $\frac{1\ 0}{7\ 62}\ \frac{1}{31}\ \frac{1}{7}$.

Sulla sesta sezione.

Una frazione è di sesto tipo quando il numero maggiore si divide esattamente per 3, e il maggiore più uno si divide esattamente per il minore meno 3, come con $\frac{17}{27}$. La regola di questa sezione è che, sottraendo tre parti da tali parti, le quali tre parti sono una frazione della prima sezione, il resto, invece, appartiene alla terza; così, se da $\frac{17}{27}$ si sottrae $\frac{3}{27}$, che secondo la prima sezione corrisponde ad $\frac{1}{9}$, rimane $\frac{14}{27}$ della terza sezione, cioè $\frac{1}{54}\ \frac{1}{2}$, che con $\frac{1}{9}$ diventa $\frac{1}{54}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{2}$, per $\frac{17}{27}$. Con la stessa regola, per $\frac{20}{33}$ si ha $\frac{1}{66}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{2}$.

Sulla settima sezione.

Una frazione è di settimo tipo se non rientra in nessuna delle suddette sezioni. La regola di questa sezione è molto utile; attraverso di essa, infatti, le frazioni che appartengono ad alcune delle suddette sezioni, vale a dire alla seconda, alla quarta, alla quinta e alla sesta sezione, si ricavano talora meglio che attraverso le loro regole specifiche. Per cui le frazioni che appartengono a queste quattro sezioni devono essere anche manipolate con questa settima regola, in modo che si possano ricavare o frazioni più eleganti o in maniera più precisa, anziché attraverso le loro regole. La regola di questa sezione è di dividere il numero maggiore per il minore, e poiché da questa divisione non risulterà un numero intero, considerare tra quali due numeri è compreso il quoziente di quella divisione; se è compreso tra 3 e 4,

si saprà che il numero minore, rispetto al maggiore, è meno di $\frac{1}{3}$ e più di $\frac{1}{4}$; e se risulta tra 4 e 5, sarà meno di $\frac{1}{4}$ e più di $\frac{1}{5}$; e così si deve intendere di tutti i due numeri tra i quali sarà compreso il quoziente di quella divisione. Poi si prende la frazione unitaria maggiore che il numero minore è del maggiore, e si considera la differenza che rimane; se questa appartiene ad una delle suddette sezioni, si opera con essa; se invece la differenza non appartiene ad alcuna delle suddette sezioni, allora si prende ancora la frazione unitaria maggiore e si reitera la regola, finché non restano frazioni che appartengono alle suddette sezioni, o finché si trovano tutte le frazioni unitarie che il numero minore è del maggiore. Per esempio, vogliamo calcolare le frazioni unitarie di $\frac{4}{13}$; la divisione di 13 per 4 ha un quoziente compreso fra 3 e 4; perciò $\frac{4}{13}$ di un intero è meno di $\frac{1}{3}$ e più di $\frac{1}{4}$; così sappiamo che $\frac{1}{4}$ è la maggiore delle frazioni unitarie che possono essere ricavate da $\frac{4}{13}$. Infatti $\frac{13}{13}$ danno un intero, e la sua quarta parte, cioè $\frac{1\ 3}{4\ 13}$ è $\frac{1}{4}$ di un intero; sottraendo $\frac{1\ 3}{4\ 13}$ da $\frac{4}{13}$, rimane $\frac{3\ 0}{4\ 13}$ che per la seconda sezione è $\frac{1}{52}$ $\frac{1}{26}$, perciò per $\frac{4}{13}$ si hanno tre frazioni unitarie, vale a dire $\frac{1}{52}$ $\frac{1}{26}$ $\frac{1}{4}$. Le frazioni di $\frac{3}{52}$ si possono ottenere in altro modo con questa settima regola. Se si divide 52 per 3, risulta poco più di 17, per cui $\frac{1}{18}$ è la frazione più grande contenuta in $\frac{3}{52}$. Il 52 diviso per 18 dà come quoziente $\frac{8}{9}$ 2 che, sottratto da 3, dà come resto $\frac{1\ 0}{9\ 52}$, vale a dire $\frac{1}{468}$; dunque per $\frac{3}{52}$ avremo $\frac{1}{468}$ $\frac{1}{18}$, e $\frac{1}{468}$ $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{4}$ per $\frac{4}{13}$.

Ancora, per calcolare le frazioni unitarie di $\frac{9}{61}$, si divide 61 per 9; risulta un po' più di 6, perciò si ha $\frac{1}{7}$ come maggiore frazione unitaria di $\frac{9}{61}$. Si divide pertanto 61 per 7; risulta $\frac{5}{7}$ 8 sessantunesimi, che si sottraggono da $\frac{9}{61}$; rimane $\frac{2\ 0}{7\ 61}$, cioè $\frac{2}{427}$, che è $\frac{1}{214}$ $\frac{1\ 0}{214\ 427}$, in quanto frazione di terzo tipo; dunque $\frac{9}{61}$ corrisponde a $\frac{1\ 0}{214\ 427}$ $\frac{1}{214}$ $\frac{1}{7}$; ancora per la terza sezione, per $\frac{2\ 0}{7\ 61}$ si ha $\frac{10}{461}$ $\frac{1\ 0}{28\ 61}$, perciò per $\frac{9}{61}$ si ha $\frac{1}{1708}$ $\frac{1}{244}$ $\frac{1}{7}$.

Allo stesso modo si può scomporre $\frac{17}{29}$ in frazioni unitarie. Una volta diviso 29 per 17, risulta 1 e un po' di più, per questo sappiamo che $\frac{17}{29}$, è più della metà di un intero; poiché $\frac{29}{29}$ formano un intero, prendendone la metà, vale a dire $\frac{1\ 14}{2\ 29}$, e sottraendola da $\frac{17}{29}$, rimane $\frac{1\ 2}{2\ 29}$, cioè $\frac{5}{58}$; perciò $\frac{17}{29}$ corrisponde a $\frac{5}{58}$ $\frac{1}{2}$, del quale $\frac{5}{58}$ occorre calcolare le frazioni unitarie, con la regola di questa stessa sezione; perciò, si divide 58 per 5; risulterà un po' più di 11, da cui si capisce che $\frac{1}{12}$ è la maggiore delle frazioni unitarie che compongono $\frac{5}{58}$; prendendo $\frac{1}{12}$ di $\frac{5}{58}$,

risulta $\frac{5\ 4}{6\ 58}$, la cui differenza con $\frac{5}{58}$ è $\frac{1\ 0}{6\ 58}$, cioè $\frac{1}{348}$; e così da $\frac{17}{29}$ si hanno tre frazioni unitarie, vale a dire $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$.

Una regola generale per la scomposizione in frazioni unitarie.

C'è invero in casi simili un'altra regola generale, che consiste nel trovare un numero che ha in sé molti fattori, come 12, o 24, o 36, o 48, o 60, o qualsiasi altro numero che sia maggiore della metà del numero che sta sotto la linea di frazione, o minore del suo doppio, come il precedente $\frac{17}{29}$; prendiamo il 24, che è più della metà di 29, e moltiplichiamo il 17, che sta sopra la frazione, per il 24; risulta 408, che si divide per 29 e per 24; risulterà $\frac{2\ 14}{29\ 24}$; si trovano le frazioni unitarie di $\frac{14}{24}$, che sono $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, ovvero $\frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$, che si tengono per le parti di $\frac{17}{29}$; poi si trovano le frazioni unitarie di $\frac{1}{24}$ di $\frac{2}{29}$; si ottiene $\frac{1\ 0}{12\ 29}$, cioè $\frac{1}{348}$, perciò per $\frac{17}{29}$ si ha $\frac{1}{348}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, o $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$, come abbiamo già calcolato più sopra.

Se poi si moltiplica il 17 che sta sopra il 29 per il 36, così come per 24, e si divide per 29 e per 36, risulta $\frac{3\ 21}{29\ 36}$, e $\frac{21}{36}$ è $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, o $\frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$; e il 3 che sta sopra il 29 è $\frac{1}{29}$ di $\frac{3}{36}$, o $\frac{1\ 0}{12\ 29}$, cioè $\frac{1}{348}$; e così si ottengono ancora $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$ come frazioni unitarie. Si sappia che abbiamo moltiplicato per 24 quel 17 che sta sopra il 29, e abbiamo diviso il prodotto per 29, perché di $\frac{17}{29}$ abbiamo fatto ventiquattresimi, essendo 24 il numero scelto fra i numeri composti le cui frazioni sono tra la prima e la seconda sezione. Infatti, $\frac{2\ 14}{29\ 24}$, corrisponde a $\frac{17}{29}$; per il $\frac{14}{29}$ che sta all'inizio della linea di frazione, si ha $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, o $\frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$, in base alla regola della seconda sezione; e per il $\frac{2\ 0}{29\ 24}$ che resta si ha $\frac{2\ 0}{24\ 29}$, come frazione rovesciata del primo tipo, cioè $\frac{1\ 0}{12\ 29}$. Similmente, moltiplicando il 17 per il 36, e poi dividendo per 29, si trasforma $\frac{17}{29}$ in trentaseiesimi. Ma $\frac{29}{29}$ sono uguali a $\frac{36}{36}$, perciò la proporzione che c'è fra 29 e 36 è la stessa che c'è fra 17 e un quarto numero. Per questo abbiamo moltiplicato il terzo numero, vale a dire 17, per il secondo, vale a dire per 36, e abbiamo diviso il prodotto per il primo numero. Poiché, quando quattro numeri sono proporzionali, la moltiplicazione del secondo per il terzo uguaglia la moltiplicazione del primo per il quarto come è stato dimostrato da Euclide.

Ancora, se si vuole scomporre $\frac{19}{53}$ in frazioni unitarie, allora si usa la quarta sezione, poiché 53 più uno è divisibile per 19 meno uno; e così per $\frac{19}{53}$ si ottiene $\frac{1}{159}\ \frac{1}{53}\ \frac{1}{3}$; ora vediamo come si ottengono queste frazioni attraverso la settima regola. Infatti, il quoziente della divisione di 53 per 19 cade tra 2 e 3, per questo abbiamo $\frac{1}{3}$ come maggiore frazione unitaria che può essere ricavata da $\frac{19}{53}$; poi si sottrae un terzo di 53, vale a

dire $\frac{2}{3}$ 17, da 19; rimane $\frac{1}{3}$ 1, cioè $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{53}$; dunque, le frazioni unitarie di $\frac{19}{53}$ sono $\frac{1}{159}$ $\frac{1}{53}$ $\frac{1}{3}$, come abbiamo ricavato attraverso la regola della quarta sezione.

Tuttavia, con questa regola non possono essere così facilmente calcolate le frazioni unitarie di $\frac{20}{53}$; per cui le troveremo attraverso un'altra regola, vale a dire moltiplicando il 20 per un numero che ha molti fattori, come abbiamo detto precedentemente; si moltiplica il 20 per il 48, e si divide per 53 e per 48; risulta $\frac{6\ 18}{53\ 48}$; il $\frac{18}{48}$ è $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$, o $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{3}$, e il 6 che sta sopra il 53 è $\frac{1}{8}$ di 48; perciò risulta $\frac{1\ 0}{8\ 53}$, poiché il 6 sta sopra i 53; dunque, per le frazioni unitarie di $\frac{20}{53}$ si ottiene $\frac{1\ 0}{8\ 53}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$, o $\frac{1\ 0}{8\ 53}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{3}$; e così si procederà in tutti i casi simili; e quando non si possono ottenere frazioni unitarie attraverso una qualunque delle suddette regole, bisognerà trovarle attraverso qualche altra regola; bisogna notare che sono molte le frazioni che si devono adattare prima di scomporle in frazioni unitarie, per esempio, quando il numero maggiore non si divide per il minore, ed essi hanno tra loro un fattore in comune, come con $\frac{6}{9}$ in cui ciascuno si divide esattamente per 3; perciò, si dividono entrambi per 3, e risulta $\frac{2}{3}$, che è una frazione del terzo tipo, dal momento che uno più 3 è divisibile per 2; per cui si ha $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$; lo stesso vale per $\frac{6}{8}$ ciascuno dei cui numeri è divisibile per 2, per cui si riduce a $\frac{3}{4}$, che è $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$, per la seconda sezione; e così si deve intendere in casi simili. E se ci sono più parti sotto una frazione, è necessario che siano ridotte a una sola parte frazionaria, come con $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$, che è $\frac{7}{16}$. Si fa così: si moltiplica il 3 che sta sopra l'8 per il 2, e si addiziona l'1, e si ha 7; poi si moltiplica il 2 per l'8 che sta sotto la frazione; risulta 16, che si pone sotto la frazione, con sopra il 7.

Ancora, $\frac{2\ 3\ 4}{3\ 5\ 9}$ corrisponde a $\frac{71}{135}$, che si calcola, col metodo descritto prima, moltiplicando il 4 che sta sopra il 9 per il 5, et addizionando il 3, e moltiplicando per 3 e addizionando il 2; così si ottiene 71 sopra la linea di frazione, e dalla moltiplicazione del 3 per il 5, e poi per il 9, si ottiene 135 sotto la linea di frazione; questo $\frac{71}{135}$, in base alla settima regola, si scompone in $\frac{1}{270}$ $\frac{1}{45}$ $\frac{1}{2}$.

Bisogna notare che quando con la settima regola si calcola la parte maggiore che il numero minore sarà del maggiore, e si aggiungono le restanti frazioni unitarie, può risultare un qualcosa di poco elegante; allora, si lasci perdere quella parte maggiore e si proceda con la frazione che viene subito dopo e che è minore; così se la parte maggiore è $\frac{1}{5}$, si operi con $\frac{1}{6}$; e se è $\frac{1}{7}$, si operi con $\frac{1}{8}$. Per esempio, in $\frac{4}{49}$ la parte maggiore è $\frac{1}{13}$, che si sottrae da $\frac{4}{49}$; rimane $\frac{3\ 0}{13\ 49}$, cioè $\frac{3}{637}$ che, in quanto frazione di quarto tipo, corrisponde a $\frac{1\ 0}{319\ 637}$ $\frac{1}{637}$ $\frac{1}{319}$; perciò per $\frac{4}{49}$ si ha $\frac{1\ 0}{319\ 637}$ $\frac{1}{637}$ $\frac{1}{319}$ $\frac{1}{13}$, che è poco elegante; perciò, lasciando

$\frac{1}{13}$ e operando con $\frac{1}{14}$, che sottratto da $\frac{4}{49}$ dà $\frac{1\ 0}{2\ 49}$, cioè $\frac{1}{98}$, si ottiene $\frac{1}{98}\ \frac{1}{14}$ per $\frac{4}{49}$, che è molto meglio; si possono trovare queste frazioni in un altro modo, vale a dire dividendo il 4, che sta sopra il 49, per la scomposizione di 49; risulta $\frac{4\ 0}{7\ 7}$, che in quanto frazione composta del terzo tipo, corrisponde a $\frac{1\ 0}{14\ 7}\ \frac{1\ 0}{2\ 7}$; per $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ si ha $\frac{1}{14}$, e per $\frac{1\ 0}{14\ 7}$ si ha $\frac{1}{98}$; così per $\frac{4}{49}$ si ottiene similmente $\frac{1}{98}\ \frac{1}{14}$.

Considerazioni conclusive della Parte Prima

L'introduzione in Europa del sistema di numerazione indo-arabo, avvenuta attraverso la pubblicazione del Liber Abaci, da parte di Fibonacci, rappresenta la prima fase di un processo evolutivo che si è concluso con la diffusione pressoché universale del sistema di numerazione oggi in uso.

Tuttavia, con tale sistema iniziale, si usavano soltanto numeri interi, mentre si ricorreva alle frazioni proprie per indicare le parti inferiori all 'unità. Ne risultavano, come abbiamo visto, procedure di calcolo piuttosto complicate per le operazioni aritmetiche con tali numeri.

Un primo passo semplificativo fu compiuto da Stevino, che pubblicò nel 1585 un libretto in fiammingo, De thiende (Il decimo), in cui si fa un uso esclusivo delle frazioni decimali, descrivendo procedure di calcolo più semplici per operare con tali numeri.

Si deve infine a Nepero l'ultimo passo per arrivare alla notazione oggi in uso; nel 1616, nella traduzione in inglese del suo libro sui logaritmi (Mirifici logarithmorum canonis descriptio), i numeri decimali vengono per la prima volta scritti con la virgola, o con il punto, per separare la parte intera da quella frazionaria.

Il "Sistema di numerazione posizionale in base dieci", ormai completamente sviluppato, viene successivamente generalizzato alle unità di misura, con la rivoluzione francese, diventando così il sistema di numerazione universalmente in uso.

Con esso si sviluppano le procedure di calcolo della moderna Aritmetica, molto più semplici, tanto da poter essere insegnate ai ragazzi, nel primo ciclo della nostra istruzione scolastica.

Parte seconda - Capitolo 12 (parziale)

Introduzione al Capitolo XII.

Siamo finalmente giunti al XII capitolo del Liber Abaci, il più ampio, comprendente problemi di matematica "divertente", uomini che trovano borse, conigli che si moltiplicano, divisione di cavalli ecc.

Qui sono trattati, fra gli altri, due meravigliosi problemi:

- Il primo è quello in cui si chiede di calcolare "*Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinantur"*, nella cui soluzione compaiono per la prima volta i primi dodici termini di quella che sei secoli più tardi verrà denominata la successione di Fibonacci.

- Il secondo è quello in cui si propone di sommare una sequenza di potenze del numero due su una scacchiera, cioè, il famoso problema nato dalla leggenda sulla nascita del gioco degli scacchi, o *Leggenda di Sissa Nassir*. Quest'ultimo problema costituisce anche un esempio di come sia stato possibile, con il sistema di numerazione posizionale indo-araba, ricavare un numero spropositato, come 340 282 366 920 938 463 483 374 607 431 768 211 456, che con il sistema di numerazione romana sarebbe stato ben difficile, o forse impossibile, ottenere.

NOTA

*Questo fascicolo (100 pagine in tutto) si limita alle prime **tre** delle **nove** parti del capitolo XII, elencate all'inizio, e non proseguirà oltre. Ho infatti deciso di abbandonare la traduzione, avendo appreso online dell'avvenuta pubblicazione della **prima edizione critica completa del Liber Abaci**, **Olschki 2020**, che di fatto rende obsoleto questo mio lavoro. Mi dispiace un pò di non proseguire con questa appassionante iniziativa, ma mi piace tuttavia immaginare di avere in qualche modo contribuito (almeno sollecitando) al realizzarsi dell'altra più importante opera sopra citata.*

Luciano Ancora

Capitolo 12

Qui inizia il capitolo dodici.

Dividiamo il capitolo dodici in nove parti.

1. La prima è sulla somma di una serie di numeri ed altri problemi simili.
2. La seconda è sulle proporzioni dei numeri secondo la regola delle quattro proporzioni.
3. La terza riguarda i problemi degli alberi e altri problemi simili che hanno soluzioni.
4. La quarta è sul ritrovamento delle borse.
5. La quinta è sull'acquisto di cavalli tra i membri di una società in base alle proporzioni date.
6. La sesta è sui viaggiatori, e i problemi che hanno somiglianza con i problemi dei viaggiatori.
7. La settima è sulla falsa posizione e sulle regole di variazione.
8. L'ottava è su alcuni problemi di divinazione.
9. La nona è sul raddoppio dei quadrati e alcuni altri problemi.

Qui finisce il sommario per il XII *capitolo.*

Qui inizia la ***prima parte*** *sulla somma di una serie di numeri.*

Quando si vuole sommare una certa serie di numeri che cresce regolarmente, aumentando di uno, due, tre o qualsiasi altro numero, si moltiplica la metà del numero di numeri nella serie per la somma del primo e dell'ultimo numero della serie, oppure si moltiplica la metà della somma del primo e dell'ultimo numero della serie per il numero di numeri nella serie e si avrà la proposizione. Ad esempio, si

vogliono sommare i numeri che aumentano di tre da sette a 31, vale a dire 7, 10, 13 e così via fino a 31.

19
16 22
13 25
10 28
7 31

Il numero dei suddetti numeri è 9, cioè ci sono nove numeri nella serie, di cui il primo è il sette. Il numero dei restanti numeri è otto, che si ottiene per un terzo di 24 che rimane di 31 quando viene sottratto 7. Pertanto la somma degli estremi, ovvero 7 e 31, è 38; quindi moltiplicando metà del 9 per il 38 o metà del 38 per il 9, il risultato è 171 per la somma della serie data di nove numeri; da questa regola si possono trovare le somme delle serie scritte di seguito che mostreremo in un altro modo.

Sulla stessa in un altro modo.

Se si vuole sommare una serie di numeri che aumenta di uno a partire da uno o aumenta di due a partire da 2 o aumenta di qualsiasi altro numero a partire da quel numero, allora si divide l'ultimo numero per il primo numero e si aggiunge uno al quoziente tenendo il risultato; si moltiplica questo per la metà dell'ultimo numero o si moltiplica l'ultimo numero per la metà del numero tenuto. Ad esempio, voglio sommare tutti i numeri che vanno da 1 a 60; divido 60 per 1 e al quoziente aggiungo 1; ottengo 61 che moltiplico per la metà di 60, o moltiplico 60 per la metà dei 61; risulta 1830 per la somma di detta serie. Allo stesso modo, se voglio sommare la serie che va da due a 60, aumentando di due, cioè i numeri pari, divido il 60 per 2 e aggiungo 1 al quoziente; ottengo 31 che moltiplicherò per metà di 60. Allo stesso modo, se si desidera sommare la serie da 3 a 60, aumentando di tre, ovvero 3, 6, 9 e così via, si moltiplica uno più un terzo dei 60, cioè 21, per metà di 60; si ha 630 e così procederai in

caso di problemi simili.
E se si vogliono sommare solo alcuni dei numeri che vanno da 1 a qualsiasi numero, si può procedere con la regola precedente. Oppure, si moltiplica la metà della somma degli estremi per il numero di numeri e si avrà la proposizione. Ad esempio, se si vuole sommare i numeri dispari che vanno da 1 a 19, si moltiplica la metà della somma degli estremi, vale a dire 10, per il numero di numeri dispari della serie. Esistono dieci numeri dispari che vanno da 1 a 19; il prodotto sarà 100 per la suddetta somma.

Sulla somma dei quadrati.

Se si vuole avere la somma dei quadrati di tutti i numeri in ordine dal quadrato dell'unità, vale a dire da uno fino al quadrato di qualsiasi numero, diciamo fino al quadrato di dieci, di cui il quadrato è 100, si prende il 10 e prima di esso si mette il numero successivo, vale a dire 11, e la loro somma, vale a dire 21, si mette sotto; si moltiplica il 10 per l'11 e per il 21 e si divide il triplo prodotto per 6 e per 1, che è la differenza tra il 10 e l'11, e si ottiene 385 per la somma suddetta; e sarà sempre possibile cancellare il 6 per il quale il prodotto è diviso. E se si vuole avere la somma dei quadrati fatti dai numeri dispari fino al quadrato di nove, allora si mette prima del 9 il successivo del 9, cioè 11, e la somma di essi, vale a dire 20, si mette sotto; si moltiplicano i tre numeri insieme e si divide il triplo prodotto per 12, cioè per 6, e per il 2 che è la differenza tra il 9 e l'11, e si cancella, vale a dire un terzo di 9 si moltiplica per un quarto di 20; si ha 15 che si moltiplica per 11; si ottiene 165, e questa è la somma. E se si vuole avere la somma dei quadrati fatti dai numeri pari in ordine dal quadrato di due, che è 4, fino al quadrato di dieci, che è 100, allora si prende il 10 e il numero pari successivo 12, e la loro somma, cioè 22; dalla suddetta regola si prende un dodicesimo del triplo prodotto dei numeri, e cancellando $\frac{1}{12}$ si ha 220, che è la somma richiesta. Allo stesso modo si può avere la somma di tutti i quadrati fatti dai numeri

aumentando di tre, quattro o di qualsiasi altro numero. E se si vuole avere la somma dei quadrati dei numeri che aumentano di quattro a partire dal quadrato di quattro, che è 16, fino al quadrato di qualsiasi numero, diciamo fino al quadrato di 20 , cioè 400, si inserisce prima il 20 e si scrive il numero successivo nella serie, che è 24; sotto di loro si mette la loro somma 44; si moltiplica il 20, il 24 e il 44, e si divide il triplo prodotto per 6 e per l'aumento, che è 4; moltiplicando il 20 per un quarto di un sesto di 24, cioè per 1, e per 44, si ottiene 880 per la somma cercata. Ho dimostrato geometricamente che questa è la somma dei quadrati nel libro che ho composto sui quadrati.

Su due viaggiatori, uno dei quali
insegue l'altro con un ritmo crescente.

Sono state mostrate le regole per la somma delle serie; ora ne vengono mostrate alcune applicazioni. Ci sono due uomini che si propongono di fare un lungo viaggio e uno andrà a 20 miglia al giorno. L'altro farà 1 miglio il primo giorno, 2 il secondo, 3 il terzo e così via, sempre un miglio in più ogni giorno fino a quando si incontreranno; si vuol sapere per quanti giorni il primo sarà inseguito, che si trova così: raddoppiando il 20 si 40 da cui si sottrae 1; rimane 39, e per questo numero di giorni il primo sarà inseguito; chi percorre ogni giorno 20 miglia, farà in 39 giorni 39 volte 20 miglia, che fanno 780 miglia. L'altro uomo negli stessi 39 giorni percorrerà tante miglia quante sono nella somma dei numeri che vanno da uno a 39, che si trova in modo simile dalla moltiplicazione di 20 per 39.

Ancora su due viaggiatori, uno dei
quali insegue l'altro con un ritmo crescente.

Ancora, se viene proposto che un uomo percorra 21 miglia al giorno e l'altro vada con un numero crescente di miglia dispari a partire da uno, e continui con numeri dispari successivi, allora sarà chiaro che seguirà per 21 giorni. Se prendiamo 21 numeri dispari in ordine, allora si farà

giorni
21

la loro somma da uno a 41; per cui la somma dei numeri dispari che crescono da uno a 41 è il prodotto di 21 per sé stesso.

Su due viaggiatori, uno dei
quali insegue l'altro con numeri pari.

giorni
29

Se si propone che uno percorra quotidianamente 30 miglia e l'altro segua aumentando con numeri pari, allora si fà così. Si sottrae 1 da 30; rimangono 29, che è la durata dell'inseguimento. Poiché ci sono 29 numeri pari che aumentano da due a 58, e poiché la somma dei numeri pari fino a 58 risulta dalla moltiplicazione di 29 per 30, risulta che si insegue per 870 miglia.

Quando un uomo insegue l'altro
aumentando di tre o qualche altro numero.

giorni
39

Se si propone che qualcuno percorra giornalmente un certo numero di miglia, che può essere diviso integralmente per il numero con cui cresce la serie dell'inseguitore, che aumenta di tre, quattro, cinque, o qualsiasi altro numero, si fà così: il numero di miglia che il primo uomo percorre giornalmente si divide per il numero con cui cresce la serie dell'altro, e il quoziente viene raddoppiato; dal risultato viene sottratto 1; il resto darà la quantità di giorni dell'inseguimento. Ad esempio, poniamo che uno percorra ogni giorno 60 miglia e l'altro lo insegua con un aumento di tre, cioè nel primo giorno fa 3 miglia, nel secondo 6, nel terzo 9 e così via; si divide il 60 per il 3; si ha 20 che raddoppiato dà 40, da cui si sottrae uno; resta 39, e per questo numero di giorni il secondo seguirà il primo; 39 è il numero dei numeri che aumentano di tre fino al triplo di 39, cioè 117. La somma dei numeri che aumentano di tre, da 3 a 117, risulta dalla moltiplicazione di 39 per 60, come si trova dalla prima regola. E colui che ogni giorno percorre 60 miglia, percorrerà 39 volte 60 miglia nei 39 giorni.

La stessa per un aumento di cinque.

giorni
23

Ancora, se l'altro insegue con un aumento di cinque, allora si raddoppia un quinto di 60 e quindi si sottrae uno, e si ha 23 per il numero dei giorni, e ciò può essere fatto per qualsiasi numero in aumento.

Quando il numero di miglia di chi va con velocità costante non è integralmente divisibile per l'aumento del numero dell'altro.

E se il numero dei giorni in cui si va sempre allo stesso modo non può essere diviso per l'aumento dell'altro, allora si farà diversamente da come si è detto prima; cioè, se si ponee che ogni giorno si percorrono 10 miglia e si insegue con un aumento di tre, allora si prende un terzo di 10, ovvero $\frac{1}{3}$ 3, e lo si raddoppia; si ha $\frac{2}{3}$ 6, da cui si sottrae 1; rimane $\frac{2}{3}$ 5 e si toglie la frazione, cioè $\frac{2}{3}$, lasciando 5, e in questo numero di giorni si raggiungerebbe il primo. Trovato il loro ammontare, si vede quanto arriva lontano chi va ugualmente in 5 giorni. Percorre 50 miglia. L'altro lo insegue percorrendo nei 5 giorni una quantità data dalla somma dei numeri da 3 a 15, con l'aumento di tre, cioè 45 miglia, che è di 5 sotto le 50 miglia trovate. E' chiaro che nei 5 giorni il secondo uomo non raggiunge il primo; per sei giorni si ha una somma della serie che aumenta di tre; colui che segue percorre altre 18 miglia, mentre l'altro percorre altre 10 miglia; le 10 sottratte dalle 18 danno 8, per cui si dividono le 5 ottenute prima; il quoziente sarà $\frac{5}{8}$, che aggiunto ai 5 giorni trovati dà $\frac{5}{8}$ 5, e in questo numero di giorni il secondo raggiunge il primo. Del resto, l'ammontare delle miglia percorse da chi insegue nei 5 suddetti giorni, cioè 45 miglia, diviso per le 8 appena trovate, darà ugualmente $\frac{5}{8}$ 5, e quindi così si potrà fare con tutti i problemi simili.

giorni
$\frac{5}{8}$ 5

*Qui inizia la **seconda parte** sulle proporzioni dei numeri.*

Un numero può fare con un altro numero una proporzione uguale o maggiore o minore. La proporzione è uguale quando i numeri stessi sono uguali, come 3 e 3. I numeri che sono in proporzione maggiore hanno proporzione in base a ciò che viene fuori dalla divisione del numero maggiore per il minore, come 8 e 4, che sono in doppia proporzione perché l'8 diviso per il 4 ha quoziente 2, o perché l'8 è il doppio del 4. Ancora, 9 e 3 sono in tripla proporzione perché il 9 è triplo del 3. E 16 e 5 sono in proporzione tripla e un quinto, perché il 16 diviso per 5 ha quoziente $\frac{1}{5}$ 3. E così vanno intese tutte le proporzioni maggiori. I numeri che hanno una proporzione minore sono nella proporzione che risulta dalla divisione del minore per il maggiore, come 4 e 8, che sono in metà proporzione perché il 4 diviso per l'8 risulta un mezzo, o perché il 4 è la metà dell'8. Ancora, 3 e 9 sono nella proporzione di un terzo, perché il 3 è un terzo del 9. E 5 e 16 sono in proporzione di $\frac{5}{16}$, perché il 5 diviso per 16 risulta $\frac{5}{16}$.

Se si cerca un numero in modo che fra 6 e quel numero vi sia la stessa proporzione che c'è fra 3 e 5, si fa cosi': si oltiplica il 5 per il 6, si ha 30 che si divide per 3; si ha 10, che è il numero richiesto, perché come 3 sta a 5, così 6 sta a 10. E' uso comune proporre questo stesso problema in un altro modo: a quale numero starà 6 come 3 sta a 5? E a tale proposizione, il 5 sarà moltiplicato per 6 e il prodotto diviso per 3. Ad esempio, si cerchi un numero in modo che fra 11 e quel numero si abbia la stessa proporzione che c'è fra 5 e 9; cioè, secondo l'uso comune, a quale numero sarà 11 come 5 sta a 9? Quindi si moltiplica il 9 per l'11 e si divide per il 5; il quoziente darà $\frac{4}{5}$ 19 per il numero richiesto.

proporzione
10

proporzione
$\frac{4}{5}$ 19

Altri tipi di proporzioni.

Se si propone di trovare il numero che sta alla metà di 10 come 7 sta alla metà di 12, allora si può porre il problema in due diversi modi,

cioè dicendo: se 7 sta alla metà di 12, che è 6, e intendendo: se 6 aumenta a 7 o se 7 diminuisce a 6. Per cui, se 6, cioè metà di 12, aumenta a 7, di quanto aumenta la metà di 10? Si moltiplica il 7 per il 10 e si divide per il 12; il quoziente sarà $\frac{5}{6}$ 5 per la proporzione con la metà di 10. E se 7 diminuisce a 6, cioè alla metà di 12, allora di quanto diminuisce la metà di 10? Allora si moltiplica il 6 per metà di 10, vale a dire per 5; si ha 30 che si divide per 7; il quoziente sarà di $\frac{2}{7}$ 4, e questa è la proporzione con la metà di 10. E così si risolveranno i problemi simili, in qualunque dei due modi sopra scritti.

proprzione

$\frac{5}{6}$ 5

$\frac{2}{7}$ 4

Sulla stessa.

Si cerca un numero in modo che $\frac{1}{5}$ stia ad esso come $\frac{1}{3}$ sta a $\frac{1}{4}$; questo problema si dice così: se $\frac{1}{3}$ di un rotolo vale $\frac{1}{4}$ di un bisante, allora quanto vale $\frac{1}{5}$ di un rotolo? Si tratta di un problema di negoziazione che va risolto secondo ciò che abbiamo insegnato per problemi simili nell'ottavo capitolo.

bisanti	*rotoli*
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

Su quattro numeri proporzionali.

Si vogliono trovare quattro numeri interi proporzionali, dei quali il primo stia al secondo, come il terzo sta al quarto, cioè il rapporto tra il primo numero e il secondo sia lo stesso del rapporto tra il terzo numero e il quarto, o qualunque multiplo il primo è del secondo, il terzo sia lo stesso multiplo del quarto numero. Presi arbitrariamente due numeri per il primo e il secondo numero, il primo sia 3 e il secondo 7, per il terzo numero si inserisce qualsiasi numero che sia divisibile integralmente per il primo numero, sia esso 6; si divide il 6 per il primo numero, cioè per il 3; il quoziente sarà 2 che si moltiplica per il secondo numero, cioè 7; si ha 14 che è il quarto numero. In effetti 3 diviso per 7 è tre settimi; allo stesso modo 6 diviso per 14 è

3/7 $\frac{3}{7}$; si può anche avere 14 per il primo numero, 6 per il secondo, 7 per il terzo e 3 per il quarto; infatti il 14 diviso per il 6 è uguale al 7 diviso per il 3, essendo il 14 due volte sette e il 6 due volte 3; si noti ancora che quando i quattro numeri dati sono già proporzionali, vale la proporzione permutata, cioè il primo al terzo come il secondo al quarto; infatti il primo 3 sta al terzo 6, come il secondo 7 sta al quarto 14; ogni antecedente rispetto al suo conseguente ha il rapporto della metà; inoltre si noti che per quattro numeri proporzionali il prodotto del primo numero per il quarto numero è sempre uguale al prodotto del secondo numero per il terzo numero, come qui il prodotto del 3 e del 14 è uguale al prodotto del 6 e del 7.
Ancora, come il primo numero sta al secondo, e il terzo sta al quarto, così sta il quinto al sesto. Con i primi quattro numeri proporzionali trovati come sopra, si può mettere un quinto numero qualsiasi che sia integralmente divisibile per il primo numero. Sia 15 il quinto numero che è divisibile per 3 con quoziente 5, che si moltiplica per il secondo numero 7; si ha 35 che sarà il sesto numero.

Sulla separazione di 10 *in quattro parti proporzionali.*

Se si propone di separare 10 in quattro parti proporzionali disuguali, vale a dire in modo che la moltiplicazione della prima per la quarta sia uguale alla moltiplicazione della seconda per la terza, allora si trovano prima quattro numeri proporzionali, siano 3, 7, 6 e 14, e si sommano; si avrà 30; di questo il 10 è la terza parte. Quindi si prende un terzo dei quattro numeri posti e si ha per la prima parte 1, per la seconda $\frac{1}{3}$ 2, per la terza 2 e per la quarta $\frac{2}{3}$ 4, e una tale sequenza sarà proporzionale.

Sulla proporzione continua.

Esiste un'altra proporzione che si chiama proporzione continua in cui tutti i numeri sono nello stesso ordine e proporzione, vale a dire, come il primo numero sta al secondo, così il secondo sta al terzo e il terzo al

quarto, e il quarto al quinto, e così via, passo dopo passo, ciascuno sta al successivo. Se si vogliono trovare alcuni numeri in proporzione continua, si inserisce quello che si vuole per il primo numero; per il secondo si mette un multiplo del primo, come il doppio, il triplo, o un multiplo arbitrario, e si mette per il terzo lo stesso multiplo del secondo che il secondo è del primo numero. Allo stesso modo, si prende per il quarto lo stesso multiplo del terzo, e per il quinto del quarto, e per ciascuno lo stesso multiplo del suo antecedente. Ad esempio, vogliamo trovare cinque numeri in proporzione continua. Il primo sia 1, il secondo 2, vale a dire il doppio del primo, il terzo sia il doppio del secondo, ovvero 4, il quarto il doppio del terzo, ovvero 8, il quinto il doppio del quarto, ovvero 16; 1 è la metà di 2; 2 è anche la metà di 4, 4 di 8 e 8 di 16. Allo stesso modo in cui il 16 è il doppio dell'8, così l'8 è il doppio del 4, il 4 il doppio del 2 e il 2 il doppio dell'1; quindi si può porre ogni numero triplicando il numero precedente o prendendone qualsiasi altro multiplo si voglia. Si noti che quando tre numeri sono in proporzione continua, il prodotto del primo per il terzo sarà uguale al prodotto del secondo per sé stesso. Ad esempio, 3, 9, e 27, sono in proporzione continua, e 3 volte 27 è uguale a 9 volte 9, vale a dire 81. Quando quattro numeri sono in proporzione continua, il primo per il quarto è uguale al secondo per il terzo e il primo per il terzo è uguale al secondo per sé stesso, e la moltiplicazione del secondo per il quarto è uguale alla moltiplicazione della terzo per sé stesso. E se il primo numero è 1, il secondo 2, il terzo 4, e il quarto 8, si può verificare con essi ciò che abbiamo detto. Allo stesso modo, quando diversi numeri sono in proporzione continua, il prodotto degli estremi è uguale al prodotto degli estremi rimanenti, e questo è vero fino a quando rimarrà solo il numero nel mezzo della proporzione. Ad esempio, se nove numeri sono in proporzione continua, si ha che la moltiplicazione del primo numero per il nono, equivarrà alla moltiplicazione del secondo per l'ottavo, che equivarrà alla moltiplicazione del terzo per il settimo, e del quarto per il sesto e del quinto, che è al centro della proporzione, per sé stesso. Per rendere questo evidente consideriamo i nove numeri in

proporzione continua, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256; le moltiplicazioni di 1 per 256, 2 per 128, 4 per 64, 8 per 32 e 16 per sé stesso, sono tutte uguali. Da ciò segue il materiale sulla moltiplicazione delle figure che abbiamo insegnato nel secondo capitolo ed è contenuto nello stesso capitolo.

Alla ricerca di due numeri, 2/7 di uno che sono 3/8 dell'altro.

Se si cercano due numeri per i quali $\frac{2}{7}$ dell'uno sono $\frac{3}{8}$ dell'altro, allora si moltiplica il 7 per il 3 e l'8 per il 2 e si avrà 21 per il primo numero e 16 per il secondo; 6 è $\frac{2}{7}$ di 21 e $\frac{3}{8}$ di 16; procedendo con questa regola, ne consegue che $\frac{2}{7}$ di $\frac{3}{8}$ di qualsiasi numero è $\frac{3}{8}$ di $\frac{2}{7}$ dello stesso numero. Quando moltiplichiamo il 7 per il 3, prendiamo $\frac{3}{8}$ di 56, e il 56 nasce dalla moltiplicazione degli stessi 7 e 8 che sono sotto le frazioni, perché la proporzione è di 3 a 8, la stessa proporzione di sette volte 3 a sette volte 8, e quando moltiplichiamo l'8 per il 2, prendiamo $\frac{2}{7}$ dello stesso 56. Per cui, $\frac{2}{7}$ di 21, ovvero $\frac{3}{8}$ di 56, è uguale a $\frac{3}{8}$ di 16, ovvero $\frac{2}{7}$ di 56.

Sulla stessa.

Ancora, $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di un numero sia $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ di un altro; semplificando $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ si ha $\frac{7}{12}$, e con $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ si ha $\frac{9}{20}$. Pertanto $\frac{7}{12}$ di un numero deve essere $\frac{9}{20}$ del secondo. Per quanto scritto sopra si moltiplica il 12 per il 9 e il 20 per il 7, e si ha 108 per il primo numero e 140 per il secondo, e possiamo avere la risposta in numeri più piccoli perché entrambi i numeri possono essere divisi integralmente per 4. Quindi se prendiamo la quarta parte di ciascuno, avremo 27 per il primo numero e 35 per il secondo; o altrimenti, poiché in ciascuna delle due

moltiplicazioni sopra scritte si moltiplica un numero che è un multiplo di quattro, il primo è 12 e il secondo 20, quindi si può moltiplicare solo la quarta parte del 12 per il 9, e la quarta parte del 20 per il 7, e ugualmente si ha 27 e 35.

Sulla stessa.

Ancora, $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del primo numero sia uguale a $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ del secondo; si semplifica $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, si ha $\frac{47}{60}$; si fa lo stesso con $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, si ha $\frac{37}{60}$; si moltiplica il 60 che è sotto il 47 per il 37, e il 60 che è sotto il 37 per il 47, e per avere numeri più piccoli, si moltiplica solo un sessantesimo di 60 per il numero in diagonale opposto e si ha 37 per il primo numero e 47 per il secondo, e così si può procedere con problemi simili.

Su tre numeri, per i quali 2/5 del primo sono 3/7 del secondo e 4/9 del terzo.

Ancora ci sono tre numeri, per i quali $\frac{2}{5}$ del primo sono $\frac{3}{7}$ del secondo e $\frac{4}{9}$ del terzo; si mettono le frazioni sopra scritte in questo modo: $\frac{4}{9}\frac{3}{7}\frac{2}{5}$, e si moltiplica ogni numero sotto la linea di frazione per il numero che è su una delle due frazioni rimanenti, e quel prodotto si moltiplica per il numero che è sopra l'altra frazione, e si avranno i due numeri cercati. Ad esempio, il 5 che si trova sotto la prima frazione viene moltiplicato per il 3 che è sopra il 7 e per il 4 che è sopra il 9, e si ha il primo numero 60. Poi si moltiplica il 7 per il 4 e per il 2; si ha 56 per il secondo numero. Ancora, si moltiplica il 9 che è sotto la terza frazione per il 3 e per il 2; si ha 54 per il terzo numero. Se si vuole approfondire come procede questa regola, allora si consideri che $\frac{2}{5}$ di $\frac{3}{7}$ di $\frac{4}{9}$ di qualsiasi numero è $\frac{3}{7}$ di $\frac{4}{9}$ di $\frac{2}{5}$

dello stesso numero e $\frac{4}{9}$ di $\frac{3}{7}$ di $\frac{2}{5}$ dello stesso numero; sapendo questo, abiamo preso sopra $\frac{4}{9}$ di $\frac{3}{7}$ del numero che era il triplo prodotto di 9, 7 e 5, cioè 315, e abbiamo moltiplicato il 5 per il 3 e il 4, ottenendo 60; allo stesso modo abiamo avuto il 56, prendendo $\frac{4}{9}$ di $\frac{2}{5}$ del 315, e poi abbiamo avuto il 54, prendendo $\frac{3}{7}$ di $\frac{2}{5}$ del 315. Per cui, $\frac{2}{5}$ di 60, cioè $\frac{3}{7}$ di $\frac{4}{9}$ di 315 è $\frac{3}{7}$ di 56, cioè $\frac{4}{9}$ di $\frac{2}{5}$ di 315 e $\frac{4}{9}$ di 54, ovvero $\frac{3}{7}$ di $\frac{2}{5}$ dello stesso 315. La suddetta quantità 24 è il triplo prodotto di 2, 3 e 4; possono essere trovati numeri più piccoli se i tre numeri trovati, cioè 60, 56 e 54, sono divisi per 2 che è un loro fattore comune, e si ha 30 per il primo numero, 28 per il secondo e 27 per il terzo.

Sulla stessa.

E se si propone che $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, ovvero $\frac{7}{12}$, del primo numero sia $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, ovvero $\frac{9}{20}$ del secondo, e $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$, cioè $\frac{11}{30}$, del terzo, allora si ordinano le frazioni, $\frac{11}{30}, \frac{9}{20}, \frac{7}{12}$, e si moltiplica il 12 per il 9 e l'11, il 20 per l'11 e il 7, e il 30 per il 9 e il 7; si cancella prendendo $\frac{1}{2}$ di ciascun prodotto, e si ha 594 per il primo numero, 770 per il secondo e 945 per il terzo.

Sulla stessa.

15	20	24
	5	6
3	4	

Ancora, cerchiamo tre numeri, per i quali $\frac{1}{3}$ del primo sia $\frac{1}{4}$ del secondo, e $\frac{1}{5}$ del secondo sia $\frac{1}{6}$ del terzo numero; prima si trovano due numeri per i quali $\frac{1}{3}$ dell'uno è $\frac{1}{4}$ dell'altro; siano 3 e 4; dopo si

trovano altri due numeri, per i quali $\frac{1}{5}$ dell'uno è $\frac{1}{6}$ dell'altro, e siano 5 e 6; quindi, il primo numero stia al secondo come 3 sta a 4, e il secondo stia al terzo come 5 sta a 6; si mettono il 3 e il 4 in una riga, e il 5 e il 6 in un'altra, in modo che il 5 sia sopra il 4, come qui mostrato; si moltiplica il 5 per il 3, il 5 per il 4, e il 4 per il 6, e si ha 15 per il primo numero, 20 per il secondo e 24 per il terzo. Ad esempio, poiché il 3 sta al 4, come qualsiasi multiplo di 3 sta allo stesso multiplo di 4, allora, il 3 sta al 4, come il quintuplo di 3, ovvero 15, sta al quintuplo di 4, ovvero 20. Ancora, il 5 sta al 6, come qualsiasi multiplo di 5 sta allo stesso multiplo di 6; quindi, il 5 sta al 6, come il quadruplo di 5, cioè 20, sta al quadruplo di 6, cioè 24; il primo numero risulta essere 15, il secondo 20, e il terzo 24, e 15 sta a 20 come 3 sta a 4, e 20 sta a 24 come 5 sta a 6, come abbiamo cercato.

Sulla stessa.

E se si propone che ci siano quattro numeri per cui il primo, il secondo e il terzo di essi stiano fra loro come la proporzione sopra scritta, e i $\frac{2}{5}$ del terzo numero siano i $\frac{3}{7}$ del quarto numero; i primi tre numeri siano quelli trovati sopra, vale a dire 15, 20 e 24; poi troviamo due numeri per i quali $\frac{2}{5}$ di uno sono $\frac{3}{7}$ dell'altro, e saranno 15 e 14, che scriviamo sopra gli altri tre numeri, come qui mostrato; si moltiplica il 15 che è sopra il 24, per il 15, per il 20 e per il 24; si moltiplica il 14 per il 24 e si ha 336 per il quarto, e il terzo numero sta al quarto come 15 sta a 14; $\frac{2}{5}$ del terzo numero sono $\frac{3}{7}$ del quarto, e così si possono trovare più numeri in qualsiasi proporzione.

225	300	360	336
		15	14
15	20	24	

*Qui inizia la **terza parte** sui problemi degli alberi*
e altri problemi simili, per i quali si trovano soluzioni.

C'è un albero $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del quale si trova sottoterra, ed è 21 palmi; si cerca qual'è la lunghezza dell'albero; poiché il minimo comune denominatore di $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ è 12, si vede che l'albero è divisibile in 12 parti uguali; tre più quattro parti sono 7 parti, e 21 palmi; quindi si ha che il 7 sta al 21, come il 12 sta alla lunghezza dell'albero. E poiché i quattro numeri sono proporzionali, il prodotto del primo per il quarto è uguale al secondo per il terzo; quindi se si moltiplica il secondo 21 per il terzo 12 e si divide per il primo numero, cioè per il 7, il quoziente sarà 36 per il quarto numero sconosciuto, cioè per la lunghezza dell'albero; o poiché il 21 è triplo del 7, si prende il triplo del 12 e si ha allo stesso modo 36.

palmi	*parti*
21	7
36	12

Esiste un altro metodo usato, cioè si mette per il numero sconosciuto un numero arbitrario che sia integralmente divisibile per i denominatori delle frazioni presenti nel problema, e con tale numero si cerca la proporzione che risolve il problema. Ad esempio, il numero richiesto da questo problema è la lunghezza dell'albero; quindi lo si pone a 12, che è divisibile integralmente per il 3 e il 4 che sono sotto le frazioni, e poiché si dice che $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'albero sia 21, si prende $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del 12 posto; si ha 7, e se fosse 21 avremmo casualmente la proposizione, ovvero che l'albero è di 12 palmi. Ma poiché 7 non è 21, si ha, proporzionalmente, che il 7 sta al 21, come il valore messo sta al valore desiderato, cioè come il 12 sta al 36; quindi si dice secondo l'usanza, ho messo 12, e ho avuto 7; cosa devo mettere in modo da avere 21? E come dire, si moltiplicano fra loro i numeri estremi, cioè il 12 e il 21, e il loro prodotto si divide per il numero rimanente.

risult.	*messo*
7	12
21	36

Su un albero dal quale,
quando viene sottratto $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *, rimane* 21.

Ancora, c'è un albero di cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ giace sottoterra. Il resto che è fuori terra è di 21 palmi; si prendono 12 parti uguali dell'albero, da cui se ne tolgono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, cioè sette parti; rimangono 5 parti che corrispondono ai 21 palmi; quindi 5 parti stanno a 21, come 12 parti stanno alla lunghezza dell'albero; si divide il prodotto di 12 e 21 per 5; il quoziente sarà di $\frac{2}{5}$ 50 palmi. Oppure, in un altro modo, ponendo l'albero a 12 palmi, da cui se ne prendono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, cioè 7, ne rimangono 5 palmi sopra il terreno; quindi si dice, ho messo 12 ed ho avuto 5, cosa devo mettere per avere 21? Si moltiplicano gli estremi, cioè il 12 e il 21, e si divide per il numero medio; risulta allo stesso modo $\frac{2}{5}$ 50; se si vuole verificarlo, poiché $\frac{7}{12}$ vengono sottratti da esso, rimangono $\frac{5}{12}$ dello stesso; pertanto si prendono $\frac{5}{12}$ di $\frac{2}{5}$ 50, che si può fare in due modi; si prendono $\frac{5}{12}$ di 48, ovvero $\frac{1}{12}$ di 48 ovvero 4 per 5; si ha 20; poi si sottrae il 48 dal $\frac{2}{5}$ 50; rimane $\frac{2}{5}$ 2, cioè $\frac{12}{5}$, a cui si aggiungono $\frac{5}{12}$; si hanno 5 quinti, vale a dire 1, che aggiunto ai 20 trovati dà 21, e questo avremmo sottraendo $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ da $\frac{2}{5}$ 50; o in un altro modo, si moltiplica il $\frac{2}{5}$ 50 per il 5 che è sopra il 12; si ha 252, che diviso per 12 dà 21, e facendo quinti del $\frac{2}{5}$ 50, si hanno 252 quinti dai quali se ne tolgono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire 84 più 63; rimangono 105 quinti di palmo che si trovano sopra il suolo, cioè 21 palmi.

palmi	*parti*
21	5
$\frac{2}{5}$ 50	12

Su un albero o numero a cui, quando
viene aggiunto $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *di esso, risulta* 38.

Ancora, si dica che quando $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ della lunghezza dell'albero viene aggiunto ad essa, si abbia 38; quindi, dalla suddetta seconda dimostrazione della regola, mettiamo che l'albero sia 12, da cui si prende $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, ovvero 7, e lo si aggiunge a 12; si ha 19, che dovrebbe essere 38; si dice, ho messo 12 per la lunghezza dell'albero, e il risultato è 19; cosa devo mettere in modo che risulti 38? Si moltiplica il 12 per il 38, cioè il primo numero per l'ultimo, e si divide per il 19, cioè per il secondo numero; prima si divide il 38 per il 19, il quoziente è 2 che si moltiplica per 12; si ottiene 24 per la lunghezza dell'albero. Infatti, $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 24 è 14 che aggiunto a 24 dà 38, e questo è ciò che si voleva. È lo stesso se si dice, c'è un numero al quale, se si aggiunge $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, si ha 38.

risult.	*messo*
19	12
38	24

Su un albero o numero a cui, se viene aggiunta
la differenza tra esso e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *di esso, si ottiene* 51.

Ancora, c'è un albero dal quale si sottrae $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso; se la differenza viene aggiunta all'albero, allora si ottiene 51; si cerca la lunghezza dell'albero; poniamo che la lunghezza cercata sia 12, quindi se ne sottrae $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, cioè 7; rimane 5 a cui si aggiunge 12 e si ha 17, che dovrebbe essere 51; si dice, ho messo 12 ed ho avuto 17; cosa devo mettere in modo da avere 51? Si moltiplica il 12 per il 51 e si divide per il 17 o si divide il 51 per il 17 e il quoziente, cioè 3, si moltiplica per il 12; si ottiene 36 per la lunghezza dell'albero. Infatti, sottraendo $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 36, ovvero 21, da 36, si ha 15 che aggiunto a 36 dà 51, come si cercava. È lo stesso se si dice, c'è un numero a cui, se aggiungi la differenza tra esso e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, si ha 51.

Sull'albero o sul numero per il
quale $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$ *di esso è 33 più l'albero o il numero.*

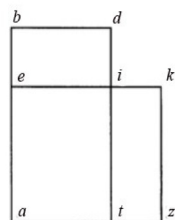
Ancora, c'è un albero di cui se si prendono $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$ e si sottrae la lunghezza dell'albero, rimane 33; si cerca di nuovo qual'è la lunghezza dell'albero e si pone la lunghezza cercata dell'albero a 20; poiché $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$ di 20 è un numero intero, cioè 31, da esso si sottrae il numero messo per la lunghezza dell'albero, vale a dire il 20; rimangono 11 che dovrebbero essere 33; si dice, ho messo 20 per la lunghezza dell'albero ed ho avuto 11; cosa devo mettere in modo che risulti 33? Si moltiplica il 20 per il 33 e si divide per l'11; oppure, si divide il 33 per l'11 e si ha 3 che si moltiplica per il 20; il prodotto sarà 60, e questa è la lunghezza dell'albero in palmi. Infatti, $\frac{3}{4}$ di 60 è 45 e $\frac{4}{5}$ di 60 è 48, che sommano insieme 93, da cui se si sottrae la lunghezza dell'albero, che è 60, ne rimangono 33, come si cercava. È lo stesso se si dice, c'è un numero che se si prendono $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$ di esso e si sottrae il numero 33, si ottiene 60. La regola dell'albero è ora spiegata e ci rivolgiamo liberamente a problemi analoghi.

risult.	*messo*
11	20
33	60

Sul trovare un certo numero del quale
$\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *è la radice dello stesso numero.*

C'è un numero che se si prende $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, il risultato, moltiplicato per sé stesso, dà lo stesso numero, cioè, la parte presa è la radice del numero; si cerca qual è il numero. Allora, si inserisce di nuovo 60 per il numero; si prende $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 60, che è 57, e si moltiplica per sé stesso; si ha 3249 che dovrebbe essere 60; quindi si dice, ho messo 60 per il numero ed ho avuto 3249. Cosa devo mettere in modo da avere 60? Quindi si moltiplica il 60 per 60 ottenendo 3600, e si divide, con la regola, per 3249 che è $\frac{1\ 0\ 0}{9\ 19\ 19}$; il quoziente

risult.	*messo*
3249	60
60	$\frac{1\ 2}{19\ 19}1$

è $\frac{1\ \ 2}{19\ \ 19}$ 1, e questo è il numero. Infatti, si moltiplica 1 per 29 e si aggiunge 2 che è sopra il 19; si moltiplica per l'altro 19 e siaggiunge 1; si ha 400 che si divide per $\frac{1\ \ 0}{19\ \ 19}$, cioè 400 trecentosessantunesimi, che si scrive così, $\frac{400}{361}$; di questo si prende $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, ovvero $\frac{380}{361}$, ovvero $\frac{20}{19}$, che moltiplicato per sé stesso dà il sopradetto $\frac{400}{361}$, ovvero $\frac{1\ \ 2}{19\ \ 19}$ 1, come si cercava. In un altro modo, poiché $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, cioè $\frac{19}{20}$ del numero, moltiplicato per sé stesso fa lo stesso numero, si trova il numero che moltiplicato per $\frac{19}{20}$ fa 1; questo si trova dividendo 1 per $\frac{19}{20}$, ovvero il 20 per il 19, la cui divisione risulta $\frac{20}{19}$, che è la radice del numero cercato, come abbiamo detto; questo moltiplicato per sé stesso fa $\frac{400}{361}$ per il numero cercato; dimostriamo questo con una figura geometrica. Si prende il segmento di linea .ab. per il numero cercato; con esso si costruisce un'area rettangolare .ad., di larghezza uguale al segmento unitario .at., cioè 1; quindi l'area .ad. è il numero cercato, perché il prodotto di .ta. e .ab. è il numero .ab. cercato; il numero .ae., costruito sul numero .ab., è $\frac{19}{20}$ del numero .ab.. Poiché il prodotto di .ae. con sé stesso si propone essere il numero .ab., è chiaro che il numero .ae. è maggiore di uno, come il numero .ab. è maggiore del numero .ae.; quindi il numero .ae. è maggiore dell'unità .at., e il rettangolo .ez. è costruito con il segmento di linea .ae.. Dalla moltiplicazione di $\frac{19}{20}$ del numero cercato per sé stesso, risulta il numero cercato; quindi, .ae. volte sé stesso è il numero .ad.. Ma dalla moltiplicazione di .ae. per sé stesso risulta il rettangolo .ez.; quindi .ez. è uguale al numero .ad.; quindi il numero .ez. è il numero cercato; se il numero .ai. viene sottratto, rimarrà il

numero .ib. uguale al numero .tk.. Il numero .bi. è dato dalla moltiplicazione di .ei. per .id., perché .bi. è l'area del rettangolo. In effetti, dalla moltiplicazione di .ti. per .ik. risulta l'area del rettangolo .tk.; i numeri .ti., .id., .ei., .ik., sono proporzionali; .ei. è uno ed è uguale all'unità .at., e il primo numero .ti. sta al secondo .id., come il terzo .ei. sta al quarto .ik.; quindi, .ti. sta a .td., coè .ae. sta a .ab., come l'unità .ei. sta al numero .ek., cioè al numero .ae.. Ma .ae. sta a .ab. come 19 sta a 20. E quindi .ei. sta a .ek. come 19 sta a 20; quindi l'unità .ei. viene moltiplicata per il 20 e il prodotto viene diviso per il 19 e si ottiene $\frac{20}{19}$ per il numero .ek., cioè per il numero .ea., come doveva essere mostrato.

Alla ricerca di un numero per il quale la radice
è la differenza tra il numero e $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *di esso.*

C'è un numero dal quale se si sottrarrà $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, la differenza moltiplicata per sé stessa farà lo stesso numero, cioè, la differenza sarà la radice del numero; si cerca qual è il numero. Lo si mette quindi a 60, perché 60 è il minimo comune multiplo dei 6, 5, 4 e 3; poi si prende $\frac{1}{3}$ di 60, cioè 20, $\frac{1}{4}$ di 60, cioè 15, $\frac{1}{5}$ di 60, cioè 12, e $\frac{1}{6}$ di 60, cioè 10, e si sommano; si ha 57 che sottratto da 60 dà 3, che moltiplicato per sé stesso fa 9, che doveva essere 60. Pertanto si dice, ho messo 60 ed ho avuto 9. Cosa devo mettere in modo da avere 60? Si moltiplica quindi il 60 per 60 e si divide per il 9; il quoziente è 400, ma poiché la regola per 9 è $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{3}$, si divide uno dei 60 per 3; il quoziente è 20. Poi si divide l'altro 60 per l'altro 3 che rimane nella regola per 9; il quoziente è anche 20 che moltiplicato per sé stesso produce allo stesso modo 400. E questo è il numero. Infatti, sottraendo $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 400, ovvero 380, da 400, rimane 20, che moltiplicato per sé stesso, dà lo stesso 400, come doveva essere. Altrimenti, se viene

Numero
400

sottratto $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del numero cercato, rimane $\frac{1}{20}$ del numero, che è la radice del numero. Pertanto, moltiplicando di $\frac{1}{20}$ del numero per sé stesso risulta lo stesso numero. Quindi, si trova il numero che moltiplicato per $\frac{1}{20}$ produce 1; questo si trova dividendo 1 per $\frac{1}{20}$; dalla divisione risulta 20 che è la radice del suddetto numero, che moltiplicata per sé stessa fa 400 per l'intero numero; questo è stato mostrato nella suddetta figura geometrica.

Trovare un altro numero a cui aggiungendo
$\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *di esso si ottiene la radice del numero.*

numero
$\frac{400}{1521}$

Ancora, c'è un numero a cui se si aggiunge $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, e si moltiplica la somma per sé stessa, si ottiene lo stesso numero; cioè, la somma è la radice del numero. Mettiamo che il numero sia 60 e aggiungiamo $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, cioè 57; si ha 117 che moltiplicato per sé stesso dà 13689, che dovrebbe essere 60; quindi si dice, ho messo 60 per il numero ed ho avuto 13689; cosa devo mettere in modo da avere 60? Si moltiplica il 60 per 60; si ha 3600 che si divide con la regola per 13689; il quoziente è $\frac{400}{1521}$ e questo è il numero; quindi, la radice del numero cercato è $\frac{20}{39}$, che, come sopra, moltiplicata per sé stessa produce $\frac{400}{1521}$.

Su un numero a cui, quando viene aggiunta la differenza
tra esso e $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *di esso, risulta la radice del numero.*

Ancora, c'è un numero a cui se viene aggiunta la differenza tra esso e $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, e si moltiplica la somma per sé stessa, si ottiene lo stesso numero, cioè, la somma sarà la radice del numero; lo si mette

quindi a 60, da cui si sottrae $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 60; rimane 3 che aggiunto a 60 dà 63, che si moltiplica per sé stesso; si ha 3969, che dovrebbe essere 60; quindi si moltiplica il 60 per 60; si ha 3600 che si divider per 3969; il quoziente è $\frac{400}{441}$ e questo è il numero. Oppure, si aggiunge a 1 $\frac{1}{20}$, cioè la differenza tra 1 e $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$; si ha $\frac{1}{20}$ 1, per cui si divide 1; si ottiene $\frac{20}{21}$, che è la radice del numero, che moltiplicata per sé stessa produce $\frac{400}{441}$ per il numero cercato.

Su un numero che quando viene sottratto da $\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}$
di esso produce una differenza il cui quadrato dà il numero.

Ancora, c'è un numero che, se si prendono $\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}$ di esso, e da questi si sottrae il numero e si moltiplica la differenza per sé stessa, si ottiene lo stesso numero; cioè, la differenza è la radice del numero; si mette 60 per il numero; di esso si prendono $\frac{2}{3}$ che è 40, $\frac{3}{4}$ che è 45, $\frac{4}{5}$ che è 48, e $\frac{5}{6}$ che è 50, e si sommano; si ha 183 da cui si sottrae 60; rimane 123 che si moltiplica per sé stesso; si ha 15129. Quindi si dice, ho messo 60 per il numero ed ho avuto 15129; cosa devo mettere in modo da avere 60? Si moltiplica quindi il 60 per 60 e si divide con la regola per il 15129; il quoziente sarà $\frac{31}{41}\frac{9}{41}$, e questo è il numero.

numero
$\frac{31}{41}\frac{9}{41}$

Alla ricerca della vita di un giovane.

Un certo giovane ha vissuto per alcuni anni; se avesse vissuto ancora tanto quanto aveva vissuto, e di nuovo la stessa quantità di anni, e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di quegli anni che aveva vissuto, e un altro anno, avrebbe vissuto 100 anni. Si cerca per quanti anni ha vissuto. Questo problema è posto in modo simile alla regola degli alberi; se si aggiunge ancora il

doppio della lunghezza dello stesso albero e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di essa, e 1, allora si ottiene 100; si fa così: si sottrae 1 da 100, cioè dalla somma degli anni; rimane 99; dopo si pone che abbia vissuto 12 anni, e dato che ha vissuto così tanto, e ancora tanto, e ancora la stessa quantità, e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di essa, si avranno 43 anni. Pertanto si dice, ho messo 12 anni per la vita del giovane ed ho ottenuto 43 anni; cosa devo mettere in modo da avere 99 anni? Si moltiplica il 12 per 99; si ha 1188 che si divide per 43; ci saranno $\frac{27}{43}$ 27 anni, e così tanto ha vissuto il giovane. Lo stesso si ottiene dalla divisione del 99 per $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 3.

anni

$\frac{27}{43}$ 27

Sul leone che era in una fossa.

Un leone è in una fossa, la cui profondità è di 50 palmi, e sale ogni giorno $\frac{1}{7}$ di palmo e scende $\frac{1}{9}$. Si cerca in quanti giorni lascerà la fossa. Si mette che lascerà la fossa in 63 giorni, perché 63 è il minimo comune multiplo del 9 e del 7, e si vede fino a che punto il leone sale e scende nei 63 giorni; egli sale 63 settimi di palmo, che sono 9 palmi, e scende 63 noni, che sono 7 palmi, che sottratti dai 9, lasciano 2 palmi, e tanto sale più di quanto scende nei 63 giorni. Quindi si dice, nei 63 giorni messi, sale 2 palmi; cosa devo mettere in modo che salga 50 palmi? Si moltiplica il 63 per 50 e si divide per 2; il quoziente sarà di 1575 giorni, e in questo numero di giorni il leone lascerà la fossa.

giorni

1575

Su due serpenti.

Ancora, c'è un serpente alla base di una torre alta 100 palmi, che sale ogni giorno $\frac{1}{3}$ di palmo, e scende ogni giorno $\frac{1}{4}$. Nella parte superiore della torre c'è un altro serpente che scende giornalmente $\frac{1}{5}$ di palmo e sale $\frac{1}{6}$; si cerca in quanti giorni siincontreranno nella torre; si mette che si incontreranno tra 60 giorni, perché 60 è il minimo comune multiplo di 6, 5, 4 e 3; quindi, si vede di quanto si

giorni

$\frac{1}{7}$ 857

ascesa

$\frac{3}{7}$ 71

discesa

$\frac{4}{7}$ 28

avvicinano i serpenti nei 60 giorni. Il serpente inferiore sale 5 palmi in più di quando scende nei 60 giorni. Il serpente superiore scende 2 palmi in più di quando sale nei 60 giorni. Pertanto, sono più vicini di 7 palmi. Quindi si dice, per i 60 giorni messi, sono più vicini di 7 palmi; cosa devo mettere in modo che siano 100 palmi più vicini? Si moltiplica il 60 per 100; si ha 6000 che si divide per 7; si ha $\frac{1}{7}$ 857 giorni, e in questo lasso di tempo si incontreranno. Se si cerca in quale parte della torre si incontrano, si fa così: si moltiplica il 5, vale a dire l'ascesa del serpente inferiore, per il 100; si ha 500 che si divide per 7; il quoziente sarà $\frac{3}{7}$ 71, e di tanto sale il serpente inferiore. E se si cerca la discesa del serpente superiore, si moltiplica il 2 per lo stesso 100 e si divide per 7, quindi il quoziente sarà $\frac{4}{7}$ 28 palmi, dal vertice al luogo dell'incontro.

Su quattro pezzi di stoffa.

Un tale compra 4 pezzi di stoffa per 80 bisanti. Compra il primo per un certo prezzo, e un altro per $\frac{2}{3}$ il prezzo del primo. Compra il terzo per $\frac{3}{4}$ il prezzo del secondo, e compra il quarto per $\frac{4}{5}$ il prezzo del terzo. Si cerca quanto vale ogni pezzo. Si pone che il primo pezzo vale 60 bisanti, perché 60 è il minimo comune multiplo dei 5 e 4 e 3. Quindi, se il primo vale 60, allora il secondo, vale $\frac{2}{3}$ di esso, cioè 40 bisanti, e il terzo vale 30 bisanti, cioè $\frac{3}{4}$ il prezzo del secondo. Il quarto vale 24 bisanti, cioè $\frac{4}{5}$ di 30. Successivamente, si sommano il 60, il 40, il 30 eil 24, vale a dire i prezzi di vendita dei suddetti quattro pezzi; si ottiene 154, che dovrebbero essere 80; si dice, ho messo 60 per il prezzo del primo pezzo e risultano 154 bisanti dalla somma dei quattro pezzi; cosa devo mettere in modo che la somma dei pezzi sia 80 bisanti? Si moltiplica il 60 per 80; si ha 4800 che si divide

primo pezzo

$\frac{6\ \ 1}{7\ \ 11}$ 31

secondo pezzo

$\frac{4\ \ 8}{7\ \ 11}$ 20

terzo pezzo

$\frac{3\ \ 6}{7\ \ 11}$ 15

quarto pezzo

$\frac{1\ \ 5}{7\ \ 11}$ 12

con la regola per 154, cioè $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 7\ \ 11}$; si ha $\frac{6\ \ 1}{7\ \ 11}$ 31 bisanti. E questo è il valore del primo pezzo. Per avere il prezzo del secondo, si moltiplica il 40 per 80 e si divide di nuovo per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 7\ \ 11}$; il quoziente sarà $\frac{4\ \ 8}{7\ \ 11}$ 20 per il prezzo del secondo pezzo. Inoltre, per conoscere il prezzo del terzo, si moltiplica il 30 per 80 e si divide per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 7\ \ 11}$ 11; si ha $\frac{3\ \ 6}{7\ \ 11}$ 15 bisanti per il prezzo; infine, per conoscere il prezzo del quarto, si moltiplica il 24 per 80 e si divide per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 7\ \ 11}$ 11; si ha $\frac{1\ \ 5}{7\ \ 11}$ 12 bisanti per il prezzo; e si vede che in ciascuno dei quattro prodotti sopra scritti si cancella $\frac{1}{2}$.

Ancora sulla stessa.

In alternativa, in modo che questo problema si riduca alla regola delle società, si scrivono le frazioni in questo modo: $\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}$ 1; si moltiplicano il 3, il 4 e il 5 che sono sotto le frazioni; si ha 60, che si mantiene. Poi si moltiplica il 2 che è sopra il 3 per il 4 che è sotto il 3; si ha 8, che si moltiplica per 5; si ha 40, che si mantiene. Ancora, si moltiplica il 2 che è sopra il 3 per il 3 che è sopra il 4; si ha 6 che si moltiplica per il 4 che è sopra il 5; si ha 24; quindi si sommano i quattro numeri mantenuti, vale a dire il 60, il 40, il 30 e il 24; si ha 154. Si trova la regola per questo, che è $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 7\ \ 11}$; si moltiplica singolarmente ciascuno dei quattro numeri precedentemente scritti, e si divide ciascuno dei prodotti per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 7\ \ 11}$, e dopo aver annullato $\frac{1}{2}$ per ciascuno , si avrà il prezzo di ciascuno dei pezzi.

24	30	40	60
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1

Su un terzo di un numero, che è un quarto di esso volte un quinto di esso.

Si cerca un numero per il quale un quarto di esso volte un quinto di esso è un terzo di esso; si mette il numero a 60, di cui $\frac{1}{4}$ è 15; si prende $\frac{1}{5}$ di questo, che è 3, e questo dovrebbe ammontare a $\frac{1}{3}$; si moltiplica il 60 per $\frac{1}{3}$; si ha 20 che si divide per 3; il quoziente sarà $\frac{2}{3}$ 6 per il numero. In alternativa si scrivono le frazioni in ordine: $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$; poi si moltiplica l'1 che è sopra il 3 per il 4 e per il 5; si ha 20 che si divide per la moltiplicazione dell'1 che è sopra il 5 per l'1 che è sopra il 4 e per il 3, cioè per 3; il quoziente sarà similmente $\frac{2}{3}$ 6.

60		3
$\frac{2}{3}$	6	$\frac{1}{3}$

Sulle uova.

Un uomo compra a 7 uova per un denaro, e vende a 5 uova per un denaro, e il suo profitto è di 19 denari; si cerca quanto ha investito nelle uova; Si pone che abbia investito 5 denari, per i quali ha 35 uova che vende per 7 denari; pertanto il profitto è di 2 denari per i 5 denari investiti; ma i 2 denari dovrebbero essere 19 denari. Si moltiplica il 19 per il 4 e si divide per il 2; il quoziente sarà $\frac{1}{2}$ 47 denari, e questa è la somma investita dall'uomo. Pertanto, la regola è questa: si dice, il 7 meno il 5 è 2, per cui si divide la moltiplicazione del 5 per il 19, come sopra detto.

5		2
$\frac{1}{2}$	47	19

Sulle stesse uova.

Ancora, l'uomo compra a 7 uova per 2 denari, e vende a 19 uova per 6 denari e il profitto è di 21 denari; si cerca quanto investe; si scrive il problema come in figura e si moltiplica il 7 per il 6; si ha 42 che si scrive sopra il 7; si moltiplica il 19 per il 2; si ha 38 che si scrive sopra il 19; poi si sottrae il 38 dal 42; rimane 4; si moltiplica il 38 per

38		42
6		2
19		7
	$\frac{1}{2}$ 199	

il 21; si ha 798 che si divide per 4; il quoziente sarà $\frac{1}{2}$ 199 denari; si moltiplica $\frac{1}{2}$ 199 per 4 e si divide per 38, e si avrà 21 denari per il profitto.

Sui rotoli secondo la regola per le uova.

887733		815360	
14091		50960	
183		784	
rotoli			
$\frac{1\ 3}{2\ 8}$	11	$\frac{2\ 1}{9\ 5}$	17
denari			
65		77	
$\frac{1\ 1}{7\ 2}$	4	$\frac{7}{10}$	7

Si propone che $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 11 rotoli siano stati acquistati per $\frac{1\ 1}{7\ 2}$ 4 denari, e che $\frac{2\ 1}{9\ 5}$ 17 rotoli siano venduti a $\frac{7}{10}$ 7 denari, e che il profitto sia di 27 denari; si scrive il problema come qui mostrato; si moltiplicano gli 11 rotoli per l'8 della frazione, e si aggiunge il 3; si ha 91, che si moltiplica per il 2 e si aggiunge l'1; si ha 183 che si scrive sopra $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 11. Poi si moltiplicano i 4 denari per il 2 e si aggiunge 1; si ha 9 che moltiplicato per il 7 dell'altra frazione dà 63 a cui si aggiunge la moltiplicazione di 1 che è sopra il 7 per 2; si ha 65 che si scrive sopra $\frac{1\ 1}{7\ 2}$ 4. Ancora, si moltiplicano 17 rotoli per 5, e si aggiunge 1, si moltiplica per 9 e si aggiunge il prodotto del 2 che è sopra il 9 per 5; si ha 784 che si scrive sopra $\frac{2\ 1}{9\ 5}$ 17. Poi si moltiplicano i 7 denari per il 10 e si aggiunge il 7; si ha 77 che si scrive sopra il $\frac{7}{10}$ 7; dopodiché si moltiplica il numero posto sopra $\frac{2\ 1}{9\ 5}$ 17, cioè il 784, per il numero posto sopra $\frac{1\ 1}{7\ 2}$ 4, cioè per il 65; si ha 50960 che si scrive sopra il 784. Poi si moltiplica il numero messo sopra $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 11, cioè il 183, per il numero posto sopra il $\frac{7}{10}$ 7, cioè per il 77; si ha 14091 che si scrive sopra il 183; quindi si moltiplica il 50960 per le parti che sono sotto le frazioni con l'11 e il 7, cioè per il 2, l'8 e il 10, e si moltiplica il 14091 per le parti che sono sotto le frazioni con il 17 e

investimento

$\frac{6\ \ 38}{7\ \ 211}$ 304

il 4, vale a dire il 5, il 9, il 2 e il 7; per cui cui il numero 50960 si moltiplica per 2 e 8 che è 16; si ha 815360; non si moltiplica 14091 per 10, cioè per 5 e 2, per i quali dovrebbe essere moltiplicato; lo si moltiplica solo per 7 e 9, ovvero 63; si ha 887733 da cui si sottrae l'815360; rimane 72373 per il quale si trova la regola, cioè $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ \ 0}{7\ \ 7\ \ 7\ \ 211}$, con la quale dividere la moltiplicazione dell'815360 per i 27, vale a dire per 22014720; il quoziente sarà $\frac{0\ \ 0\ \ 6\ \ \ 38}{7\ \ 7\ \ 7\ \ 211}$ 304 denari, e questo sarà l'importo investito nei rotoli.

In alternativa si divide $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}$ 11 per $\frac{1\ 1}{7\ 2}$ 4; il quoziente sarà $\frac{1\ \ \ 0\ \ \ 6}{4\ \ 10\ \ 13}$ 2. Ancora, si divide $\frac{2\ 1}{9\ 5}$ 17 per $\frac{7}{10}$ 7; il quoziente sarà $\frac{8\ \ 2}{9\ \ 11}$ 2 che si sottrae da $\frac{1\ \ \ 0\ \ \ 6}{4\ \ 10\ \ 13}$ 2 e ciò che rimane si divide per il prodotto di $\frac{8\ \ 2}{9\ \ 11}$ 2 per 27, e si ha la proposizione.

Su un cane e una volpe.

giorni

100

distanza

50

Ancora, una volpe in fuga, che è 50 passi davanti a un cane, fa 6 passi per ogni 9 passi del cane inseguitore; in quanti passi il cane cattura la volpe? In effetti, questo problema usa la regola delle uova; cioè, si sottrae il 6 dal 9; rimangono 3, per cui si divide il prodotto di 6 per 50; il quoziente sarà di 100 passi, e il cane e la volpe saranno nello stesso punto. Se si ignora la loro distanza, e si propone che il cane catturi la volpe dopo 100 passi, allora si moltiplica il 3 per il 100 e si divide per il suddetto 6.

Su un uomo che invia suo figlio ad Alessandria.

Un uomo manda suo figlio ad Alessandria; gli anticipa 100 bisanti per comprare pepe e brasilina. Un *quintale*(1) di pepe costa 50 bisanti e un quintale di brasilina costa 30 bisanti; il peso del pepe è $\frac{2\ 3}{9\ 7}$ del peso della brasilina. Si cerca quanto pepe compra e quanta brasilina. Mettiamo che compra 63 quintali di brasilina, perché 63 è il minimo

comune multiplo del 9 e del 7, e vediamo quanto valgono questi 63 quintali; valgono 1890 bezants; si prendono $\frac{2\ 3}{9\ 7}$ di 63, che è 41, per peso totale di pepe acquistato, che quindi vale 2050 bisanti, a cui si aggiungono 1890 bisanti; si hanno 3940 bisanti. Quindi si dice, ho messo 63 quintali per la quantità acquistata di brasilina e sono risultati 3940 bisanti; cosa devo mettere in modo che risultino 100 bisanti? Si moltiplica il 63 per 100 e si divide per 3940, la cui regola è $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 10\ \ 197}$; il prodotto di 63 quintali per 100 dà 6300 chili, cioè 630000 decagrammi, che divisi con $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 10\ \ 197}$ danno $\frac{177}{197}$ 159 decagrammi, e questo è l'ammontare di brasilina acquistata. Poi si moltiplicano 41 quintali per 100; ci saranno 410000 decagrammi che si dividono con $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 10\ \ 197}$; il quoziente sarà $\frac{0\ \ 0\ \ 12}{2\ \ 10\ \ 197}$ 104 decagrammi, e questa è la quantità di pepe acquistato. Se si vuole sapere quanti bisanti vale il pepe e quanti la brasilina, allora si moltiplica il 2050 per 100 e si divide con $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 10\ \ 197}$ e si hanno $\frac{6}{197}$ 52 bisanti per il prezzo del pepe. Poi si moltiplica 1890 per 100 e si divide con $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 10\ \ 197}$; il quoziente sarà $\frac{191}{197}$ 47 bisanti per il prezzo della brasilina.

brasilina

$\frac{177}{197}$ 159

pepe

$\frac{0\ \ 0\ \ 12}{2\ \ 10\ \ 197}$ 104

E se il padre invia suo figlio in modo che $\frac{3}{7}$ del peso del pepe sia $\frac{2}{9}$ del peso della brasilina, allora si cercano i primi due numeri per i quali $\frac{3}{7}$ dell'uno siano $\frac{2}{9}$ dell'altro; essi saranno 14 e 27. E $\frac{3}{7}$ di 14 fa $\frac{2}{9}$ di 27; quindi si mette che compra 14 centesimi di pepe e 27 centesimi di brasilina, ed opererando come fatto sopra si troverà la quantità di entrambi i prodotti.

14	27
$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{9}$

(1) unità di misura attuali, usate per facilitare la lettura

Sullo stesso.

Ancora, se $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del peso del pepe è $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ del peso della brasilina, allora si cercano due numeri per i quali $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'uno sia $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro; saranno 27 e 35, e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 27 è $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ di 35; quindi si mette che compra 27 quintali di pepe e 35 quintali di brasilina, e poi si opera con il metodo sopra descritto.

35	27
$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{12}$

Sullo stesso.

Ancora, si propone di acquistare, con i 100 bisanti sopra scritti, pepe in misura di 50 bisanti, lattice in misura di 40 bisanti, brasilina in misura di 30 bisanti, e lino in misura di 20 bisanti. E $\frac{2}{3}$ del peso del pepe siano $\frac{4}{5}$ del peso del lattice, $\frac{6}{7}$ del peso della brasilina e $\frac{8}{9}$ del peso del lino. Per prima cosa, si trovano quattro numeri, di cui $\frac{2}{3}$ del primo numero sono $\frac{4}{5}$ del secondo, $\frac{6}{7}$ del terzo e $\frac{8}{9}$ del quarto, e si ha 36 per il primo numero, 30 per il secondo, 28 per il terzo e 27 per il quarto; quindi si mette che si comprano 36 bisanti di pepe, che valgono 1800 bisanti, 30 quintali di lattice che valgono 1200 bisanti, 28 quintali di brasilina che valgono 840 bisanti e 27 quintali di lino che valgono 540 bisanti. Il totale delle quattro merci sommate ammonta a 4380 bisanti, che invece dovrebbero essere 100 bisanti; quindi singolarmente, 36 quintali di pepe, cioè 3600 chili, 30 quintali di lattice, cioè 3000 chili, 28 quintali di brasilina, cioè 2800 chili e 27 quintali di lino, cioè 2700 chili, si moltiplicano per 100 bisanti e si divide ogni prodotto, con la regola per 4380, che è $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{6\ \ 10\ \ 73}$, e si avranno $\frac{14}{73}$ 82 chili per il

27	28	30	36
432	448	480	576
$\frac{8}{9}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$

peso del pepe, $\frac{36}{73}$ 68 chili per il peso del lattice, $\frac{4\ \ 67}{6\ \ 73}$ 63 chili per il peso della brasilina, e $\frac{47}{73}$ 61 chili per il peso del lino; e così si possono proporre vari problemi simili, che vengono risolti nel modo sopra scritto.

Sulla partizione di 10 *in tre parti disuguali*
secondo una proporzione continua.

Si propone di suddividere 10 in tre parti disuguali in modo che il prodotto del più piccolo per il più grande sia uguale al prodotto del secondo per se stesso; si fa così: si mette laprima parte uguale a 1, poi la seconda parte sia 2, che moltiplicato per se stesso fa 4. Hai tre numeri, cioè 1, 2 e 4, di cui il primo moltiplicato per il terzo, cioè l'1 per il 4, è uguale al secondo per se stesso, cioè 2 per 2. Si sommano l'1, il 2 e il 4, fa 7, ma dovrebbe essere 10; si dice, ho messo 1 per il primo numero della partizione, e risulta 7 per la loro somma; cosa metto per lo stesso primo numero in modo che risulti 10 per la somma? Quindi si moltiplica 1 per 10, e si divide per 7; sarà $\frac{2}{7}$ 1 per la prima parte. Per la stessa regola si moltiplica la seconda la parte, cioè il 2, per 10; si ha 20 che si divide ancora per il 7; il quoziente sarà $\frac{6}{7}$ 2, e questa è la seconda parte. Di nuovo si moltiplica il 4 che è la terza parte, per 10; si ha 40 che si divide per il 7; il quoziente sarà $\frac{5}{7}$ 5 per la terza parte. Quindi il prodotto di $\frac{2}{7}$ 1 e $\frac{5}{7}$ 5 è uguale a prodotto di $\frac{6}{7}$ 2 per se stesso, e $\frac{2}{7}$ 1, $\frac{6}{7}$ 2 e $\frac{5}{7}$ 5 sommati fanno 10, come richiesto. Quindi dieci, secondo la predetta condizione, può essere diviso in tre o più parti, mettendo all'inizio numeri in proporzione continua come 1, 2 e 4; quindi la divisione produrrà le parti di dieci di cui la prima moltiplicata per la terza è sempre uguale alla seconda moltiplicata per se stessa.

prima
$\frac{2}{7}$ 1
seconda
$\frac{6}{7}$ 2
terza
$\frac{5}{7}$ 5

Sulla stessa per quattro parti.

Ancora, se si vuole dividere 10 in quattro parti, in modo che la prima moltiplicata per la quarta sia uguale alla seconda moltiplicata per la terza. E ancora, la prima moltiplicata per la terza sia uguale alla seconda moltiplicata per se stessa. E ancora, la seconda moltiplicata per la quarta sia uguale alla terzamoltiplicata per se stessa. Questa partizione può essere ottenuta in vari modi. Ne mostreremo uno. Mettiamo che la prima parte sia 1 e la seconda il doppio, cioè 2. La terza sia due volte la seconda, cioè 4, e la quarta sia due volte la terza, cioè 8. Questi quattro numeri sono in proporzione continua. Sommando 1, 2, 4 e 8, si ha 15, che dovrebbe essere 10. Quindi si dice: ho messo 1 per la prima parte ed ho avuto 15 per la somma delle quattro parti; cosa devo mettere per la prima parte in modo che risulti 10 per la somma? Si moltiplica l'1 per il 10 e si divide per il 15; il quoziente sarà $\frac{2}{3}$ per la prima parte. Inoltre, moltiplicando singolarmente il 2, il 4 e l'8 per il 10, e dividendo singolarmente per il 15, si avrà: $\frac{1}{3}$ 1 per la seconda parte, $\frac{2}{3}$ 2 per la terza parte e $\frac{1}{3}$ 5 per la quarta parte; e qualunque cosa si abbia per la prima parte, raddoppiando si avrà la seconda parte, e raddoppiando ancora si avrà la terza parte, e raddoppiando ancora si avrà la quarta parte. E poiché il 10 è $\frac{2}{3}$ del 15, prendendo $\frac{2}{3}$ dei quattro numeri precedentemente scritti si avranno le parti cercate.

prima
$\frac{2}{3}$
seconda
$\frac{1}{3}$ 1
terza
$\frac{2}{3}$ 2
quarta
$\frac{1}{3}$ 5

Sulla stessa per cinque parti.

Ancora una volta, se si vuole dividere 10 in più di quattro parti, come in 5 parti in proporzione continua, cioè: la prima moltiplicata per la quinta sia uguale alla seconda moltiplicata per la quarta ed alla terza moltiplicata per se stessa. E ancora, la prima moltiplicata per la quarta sia uguale alla seconda moltiplicata per la terza. E ancora, la prima moltiplicata per la terza sia uguale alla seconda moltiplicata per se stessa. E ancora,la seconda moltiplicata per la quinta sia uguale

prima
$\frac{10}{31}$
seconda
$\frac{20}{31}$
terza
$\frac{9}{31}$ 1
quarta
$\frac{18}{31}$ 2
quinta
$\frac{5}{31}$ 5

alla terza moltiplicata per la quarta. E poi, la terza moltiplicata per la quinta sia uguale alla quarta moltiplicata per se stessa. Si mette, come sopra, 1 per la prima parte, 2 per la seconda, 4 per la terza, 8 per la quarta e 16 per la quinta parte; quindi si sommano 1, 2, 4, 8 e 16; si ottiene 31 che dovrebbe essere 10; si moltiplica 1 per 10 e si divide per 31; il quoziente sarà $\frac{10}{31}$ per la prima parte; poi si moltiplica il 2 per il 10 e si divide per il 31; il quoziente sarà $\frac{20}{31}$ per la seconda parte, e quindi, per le restanti tre parti, si avrà: $\frac{40}{31}$ per la terza, che è $\frac{9}{31}$ 1, $\frac{80}{31}$ per la quarta, che è $\frac{18}{31}$ 2, e $\frac{180}{31}$ per la quinta parte, che è $\frac{5}{31}$ 5; questi sommati fanno 10, come si voleva.

Sul leone, il leopardo e l'orso.

Un leone mangia una pecora in 4 ore, un leopardo mangia una pecora in 5 ore e un orso mangia una pecora in 6 ore; se una pecora viene a loro lanciata, quante ore impiegheranno insieme per divorarla? Si fa così: poiché il leone impiega 4 ore per mangiare la pecora, si mette $\frac{1}{4}$, per le 5 ore che impiega il leopardo, si mette $\frac{1}{5}$, e per le 6 ore dell'orso, si mette $\frac{1}{6}$, e poiché il minimo comune multiplo dei 6, 5 e 4 è 60, si mette che divorano pecore per 60 ore. Si considera quindi quante pecore mangia il leone nelle 60 ore; poichè il leone divora una pecora in quattro ore, è chiaro che divora 15 pecore nelle 60 ore; il leopardo divora un quinto delle 60, cioè 12 pecore, in 60 ore. Allo stesso modo, l'orso divora 10 pecore, poiché 10 è $\frac{1}{6}$ di 60. Pertanto nelle 60 ore mangiano 15, 12 e 10, cioè 37 pecore. Quindi si dice, ho messo 60 ore e mangiano 37 pecore. Cosa devo mettere in modo che mangino una pecora? Si moltiplica quindi l'uno per 60 e si divide per 37; si hanno $\frac{23}{37}$ 1 ore. Ed in questo tempo sarà divorata la

$\frac{23}{37}$ 1 *ore*
per la consumazione

pecora.

Su due formiche, una delle quali segue l'altra.

Due formiche sono a terra, a 100 passi di distanza, e si muovono nella stessa direzione verso un punto; la prima avanza giornalmente di $\frac{1}{3}$ di un passo e si ritira di $\frac{1}{4}$; l'altra avanza di $\frac{1}{5}$ e si ritira di $\frac{1}{6}$; si cerca in quanti giorni si incontreranno; mettiamo che si incontrano in 60 giorni durante i quali la prima avanza di un terzo di 60 passi, vale a dire 20 passi, e si ritira di 15 passi, vale a dire $\frac{1}{4}$ di 60, e quindi nei 60 giorni avanza di 5 passi in più di quanto si ritira, e l'altra, nello stesso numero di giorni, avanza $\frac{1}{5}$ di 60, vale a dire 12 passi, e si ritira $\frac{1}{6}$, vale a dire 10 passi, e quindi avanza di 2 passi in più di quanto si ritira, che sottratto dai 5 passi lascia 3 passi, e di tanto sono più vicine tra loro nei 60 giorni; i 3 passi dovrebbero essere 100 passi. Moltiplicando $\frac{1}{3}$ di 60 per 100 si avranno 2000 giorni per l'incontro.

Su due navi che si incontrano.

Due navi sono separate tra loro da una distanza, il cui viaggio può essere completato in 5 giorni dall'una, e in 7 giorni dall'altra; si cerca in quanti giorni si incontreranno se iniziano il viaggio contemporaneamente. Si moltiplica il 5 per il 7; si ha 35 e si mtte 35 per il numero di giorni; la prima nave compie in questi giorni sette volte il viaggio; l'altra nave fa cinque volte il viaggio; quindi sommando 7 e 5 si ha 12 giorni, in cui le due navi percorrono il viaggio dodici volte. Moltiplicando 1 per 35 e dividendo per 12, si ha $\frac{11}{12}$ 2, e in questo numero di giorni si incontreranno; se si vuole sapere dove si incontrano, allora si dividono 7 e 5 per 12; si ottiene $\frac{7}{12}$ del viaggio totale per la prima nave e $\frac{5}{12}$ per la seconda. E se

viene proposto che la prima nave percorra in un giorno 7 volte la distanza dall'altra nave, e l'altra la percorra 5 volte, si divide l'1 per il 12; il quoziente sarà il tempo necessario per il loro incontro, che avverrà nel luogo suddetto.

Su una vasca che ha quattro fori nella parte inferiore.

C'è una vasca che ha quattro fori e dal primo foro la vasca può essere svuotata in 1 giorno, dal secondo in 2, dal terzo in 3 e dal quarto in 4; si cerca in quante ore la vasca verrà svuotata se detti quattro fori vengono aperti insieme; si mettano 12 giorni per lo svuotamento. In questo numero di giorni il primo foro svuota la vasca dodici volte, poiché 12 giorni sono dodici volte un giorno; similmente nei 12 giorni la vasca viene svuotata sette volte dal secondo foro, dal terzo quattro volte, dal quarto tre volte, e quindi nei 12 giorni la vasca viene svuotata venticinque volte, cioè, si hanno 25 svuotamenti in 12 giorni e si chiede in quanti giorni viene svuotata 1 vasca. Si moltiplicano quindi gli estremi, ovvero il 12 per l'1, e si divide per il medio; il quoziente sarà $\frac{12}{25}$ di un giorno; se si chiede in quante ore, si moltiplica il 12 che è sopra la frazione per le ore di un giorno, cioè per 12; si ha 144 che si divide per 25; il quoziente sarà di $\frac{19}{25}$ 5 ore per il tempo di svuotamento.

Sulla stessa vasca su cui ci sono 4 *tubi.*

E se si propone che sopra la vasca ci siano 4 tubi che portano acqua, dal primo dei quali la vasca viene riempita in 6 ore, dal secondo in 9, dal terzo in 24 e dal quarto in 27; quindi si cerca: se la vasca è vuota, l'acqua fluisce simultaneamente dai tubi, e i fori sono aperti, in quante ore verrà riempita la vasca; si metta che la vasca è riempita in 12 giorni, nei quali la vasca è svuotata 25 volte dai fori; in 12 giorni ci sono 144 ore che divise per le ore del primo tubo, ovvero per 6, danno 24, e in questo tempo la vasca verrà riempita dal primo tubo, avendo diviso 144 ore per le 6 ore; così si dividono le 24 vasche per 1 vasca; quindi, con la stessa regola, si dividono le 144 ore per le ore delle

restanti tubature, vale a dire le 9, le 24 e le 27; si avranno 16, 6, e $\frac{1}{3}$ 5 vasche, che aggiunte alle 24 vasche del primo tubo, danno $\frac{1}{3}$ 51 vasche, e questo sarà il numero di vasche riempito dai 4 tubi nei 12 giorni messi, da cui, sottratte le 25 vasche che vengono svuotate dai fori, rimangono $\frac{1}{3}$ 26 vasche, che dovrebbero essere 1 vasca. Quindi si moltiplicano le ore dei 12 giorni, ovvero 144 per 1, e si divide per il secondo numero, ovvero $\frac{1}{3}$ 26; il quoziente sarà $\frac{37}{79}$ 5 ore, e in questo intervallo di tempo la vasca è riempita.

Su una botte che ha 4 *fori, uno sopra l'altro.*

Ancora, c'è una botte con 4 fori, uno sopra l'altro, che dividono la capacità della botte in quattro parti; se viene aperto il primo foro, la quarta parte della capacità della botte sopra il foro viene svuotata in 1 giorno; se si apre il secondo foro, allora la botte verrà svuotata dal primo foro al secondo, vale a dire un'altra parte, in due giorni. Ancora una volta, svuotati i due quarti, se si apre il terzo foro, in tre giorni verrà svuotata un'altra parte della botte, dal secondo foro al terzo. Ancora una volta, se si apre il quarto foro, in 4 giorni verrà svuotato un altro quarto della botte. Si cerca, se tutti e quattro i fori sono aperti, in quanti giorni si svuota l'intera botte. Poiché ciascun foro non può offrire alcun aiuto agli altri, è necessario trovare singolarmente lo svuotamento di ciascun foro. Per prima cosa diciamo che la botte contiene un certo numero di barili, diciamo 48. Si prende un quarto di 48, cioè 12, e si ha la capacità sopra ogni foro; poi si considera il primo svuotamento, che è del foro più alto; dopo si vede quanti barili sono svuotati in 12 ore da ciascuno dei quattro fori; 12 barili vengono svuotati dal primo foro nelle 12 ore, perché è stato messo che il primo foro svuota una quarta parte dell'intera botte in un giorno; e poiché dal secondo foro un'altra quarta parte in due giorni, nelle 12 ore 6 barili vengono svuotati da esso; e per la stessa regola 4 barili vengono svuotati

ore di svuotamento

primo $\frac{4\ 3}{5\ 5}$ 5

secondo $\frac{1}{13}$ 11

terzo $\frac{4}{7}$ 20

svuotamento totale: 7 giorni e

$\frac{4\ \ 0\ \ 2\ \ 5}{5\ \ 5\ \ 7\ \ 13}$ 1

ore

dal terzo foro in 12 ore; e dal quarto foro si svuotano 3 barili nelle 12 ore. Pertanto i 12, i 6, i 4 e i 3 barili vengono sommati facendo 25 barili, e questa quantità di barili viene svuotata dai quattro fori nelle 12 ore. Quindi si moltiplica il 12 per il 12, fa 144 che si divide per il 25; si hanno $\frac{4\ \ 3}{5\ \ 5}$ 5 ore, e in queste ore la botte verrà svuotata fino al foro più alto; poi si prende in considerazione lo svuotamento del secondo quarto, che viene svuotato in modo simile in altre 12 ore, durante le quali, come abbiamo detto, 6 barili vengono svuotati dal secondo foro, 4 barili dal terzo, 3 barili dal quarto foro. Pertanto dai tre fori si svuotano 13 barili; per questo si moltiplica il 12 per il 12 e si divide per il 13; il quoziente è $\frac{1}{13}$ 11 per lo svuotamento della seconda parte; poi si prende il terzo quarto, che viene svuotato di nuovo in 12 ore, durante le quali dal terzo foro vengono svuotati 4 barili e 3 dal quarto, cioè 7 barili vengono svuotati da entrambi. Quindi si moltiplica di nuovo il 12 per il 12 e si divide per il 7; il quoziente è di $\frac{4}{7}$ 20 ore per lo svuotamento del terzo quarto; dal quarto foro, il quarto rimanente si svuota in quattro giorni. Quindi si sommano i 4 giorni, e le $\frac{4\ \ 3}{5\ \ 5}$ 5, le $\frac{1}{13}$ 11 e le $\frac{4}{7}$ 20 ore; si hanno 7 giorni, e $\frac{4\ \ 0\ \ 2\ \ 5}{5\ \ 5\ \ 7\ \ 13}$ 1 ore, e in tale tempo la botte verrà svuotata.

Ancora su una botte.

E se si dice che un'intera botte viene svuotata da ognuno dei fori nel numero di giorni proposto, allora allo stesso modo si mette che la botte contiene 48 barili; poi si vede in quanto tempo la botte viene svuotata fino al primo foro, con tutti i fori aperti. Mettiamo che si svuoti tutta in 12 ore, nelle quali si svuotano 12 barili dal primo foro; dal secondo foro si svuota la stessa quantità, per cui da esso in due giorni si svuotano 24 barili; dal terzo si svuotano altri 12 barili nelle 12 ore messe, così in tre giorni si svuotano 36 barili dallo stesso foro; dal quarto si svuotano altri 12 barili in 12 ore; questi aggiunti ai barili

svuotati dagli altri tre fori fanno 48 barili, che dovevano essere 12 barili. Quindi si moltiplica il 12 per il 12 e si divide per il 48; il quoziente è di 3 ore, e in questo tempo la botte viene svuotata fino al primo foro. Inoltre se si mettono altre 12 ore per lo svuotamento del secondo quarto, si trova che 36 barili vengono svuotati dai restanti tre fori; perciò si moltiplica il 12 per il 12, e si divide per il 36; il quoziente è di 4 ore, e in questo tempo si svuota il secondo quarto. Se si mettono poi 12 ore per lo svuotamento del terzo quarto, si trova che 24 barili vengono svuotati da entrambi i fori rimasti. Perciò si moltiplica il 12 per il 12 e si divide per il 24; il quoziente è di 6 ore per lo svuotamento del terzo quarto. Del quarto foro si dice poco; è ormai chiaro che da esso il resto della botte, vale a dire 12 barili, viene svuotato in 12 ore. Perciò si aggiungono le ore di svuotamento dei quattro detti quarti, cioè il 3, il 4, il 6 e il 12; si hanno 25 ore, e in questo tempo la botte si svuota.

svuotamento al	
1° foro	3 *ore*
2° foro	4 *ore*
3° foro	6 *ore*
4° foro	12 *ore*

Ancora su una botte.

Si propone ancora che dalla sommità di una botte fino al foro più alto sia $\frac{1}{3}$ dell'intera capacità della botte, e da questo foro fino al secondo sia $\frac{1}{4}$ della stessa capacità, e dal secondo fino al terzo sia $\frac{1}{5}$, e da esso fino al foro più basso sia il resto della capacità della botte. Dal buco più alto la botte viene svuotata fino ad esso in 1 giorno. Dal secondo foro, dal più alto fino ad esso, in 2 giorni, dal terzo foro, dal secondo fino al terzo in 3 giorni, dal foro più basso, la parte della botte dal terzo foro fino ad esso è svuotata in 4 giorni. Si mette che la botte contiene 60 barili; quindi fino al foro più alto ci sono 20 barili, cioè un terzo dei 60, dal foro più alto fino al secondo foro ci sono 15 barili, cioè un quarto dei 60, e dal secondo foro fino al terzo foro i barili sono 12, cioè un quinto dei 60. I 12, i 15 e i 20 barili si sommano ottenendo 47 barili per la capacità della botte fino al terzo foro; la differenza tra il 47 e il 60 è di 13 barili dal terzo foro fino al foro più basso; poi si mette 1 giorno per lo svuotamento della botte, dall'alto verso il basso, fino al foro più alto, e in questo giorno ci sono 20 barili dal primo foro, $\frac{1}{2}$ 7 dal secondo, cioè $\frac{1}{2}$ di 15, quattro dal terzo , cioè un terzo di 12, e $\frac{1}{4}$ 3 dal quarto, cioè un quarto del 13; quindi si svuotano in 1

giorno dai quattro fori 20, $\frac{1}{2}$ 7, 4 e $\frac{1}{4}$ 3 barili, cioè $\frac{3}{4}$ 34 barili in tutto, che dovrebbero essere 20, cioè la capacità sopra il foro più alto; quindi si moltiplica 1 giorno per 20 barili, e si divide per $\frac{3}{4}$ 34; si hanno $\frac{80}{139}$ di un giorno per lo svuotamento sopra i buchi. Si mette anche un giorno per lo svuotamento dei 15 barili sopra il secondo foro, di cui dal secondo foro si svuotano $\frac{1}{2}$ 7 barili, come abbiamo detto, 4 dal terzo, $\frac{1}{4}$ 3 dal più basso, cioè $\frac{3}{4}$ 14 barili in tutto, che dovrebbero essere 15; quindi si moltiplica l'1 per il 15, e si divide per il $\frac{3}{4}$ 14; il quoziente è di $\frac{1}{59}$ 1 giorni per lo svuotamento dei 15 barili. Ancora una volta si mette un giorno per lo svuotamento dei 12 barili il terzo foro, dal quale foro vengono svuotati 4 barili in un giorno, e dal foro più basso $\frac{1}{4}$ 3 barili, cioè $\frac{1}{4}$ 7 barili da entrambi i fori, che dovrebbero essere 12 ; quindi si moltiplica l'1 per il 12, e si divide per il $\frac{1}{4}$ 7; il quoziente è di $\frac{19}{29}$ 1 giorni per lo svuotamento sopra il terzo foro. Dal foro più basso si svuota il resto in 4 giorni, come è stato proposto. Quindi si sommano 4, $\frac{19}{29}$ 1, $\frac{1}{59}$ 1 e $\frac{80}{139}$ giorni, e si hanno 7 giorni e $\frac{24\ \ 5\ \ 135}{29\ \ 59\ \ 139}$ 2 ore per lo svuotamento dell'intera botte.

svuotamento sopra	
1° foro	$\frac{80}{139}$
2° foro	$\frac{1}{59}$ 1
3° foro	$\frac{19}{29}$ 1
4° foro	4
totale: 7 giorni e $\frac{24\ \ 5\ \ 135}{29\ \ 59\ \ 139}$ *2 ore*	

Un altro metodo su una botte.

E se da ciascun foro si propone di svuotare, giù fino ad esso, un'intera botte in un dato numero di giorni, si mette similmente che la botte contiene 60 barili; quindi 20 barili vengono svuotati dal primo foro in un giorno. Dal secondo, 20 e 15 barili, cioè 35 barili in due giorni. Dal terzo foro, 20, 15 e 12, cioè 47 barili in 3 giorni. Dal foro più basso si svuotano 60 barili, cioè l'intera botte, in 4 giorni. Quindi i 20 barili sopra il primo foro si svuotano in 1 giorno. Venti barili vengono svuotati dal primo foro, $\frac{1}{2}$ 17 barili dal secondo foro, cioè la metà di 35, dal terzo $\frac{2}{3}$ 15, cioè $\frac{1}{3}$ di 47, dal foro più basso 15 barili, cioè

un quarto dei 60, e quindi in tutto $\frac{1}{6}$ 68 barili, che dovrebbero essere 20 barili; quindi si moltiplica 1 per 20 e si divide per $\frac{1}{6}$ 68; il quoziente è $\frac{120}{409}$ di un giorno. Anche per lo svuotamento dei 15 barili appena sopra il secondo foro si impiega 1 giorno, nel qual tempo $\frac{1}{2}$ 17 barili vengono svuotati dal secondo foro, $\frac{2}{3}$ 15 dal terzo e 15 dal quarto, cioè $\frac{1}{6}$ 48 barili in tutto, che dovrebbero essere 15; quindi si moltiplica l'1 per 15, e si divide per $\frac{1}{6}$ 48; il quoziente sarà $\frac{90}{289}$ di un giorno. Ancora, per lo svuotamento dei 12 barili appena sopra il terzo foro si mette 1 giorno, durante il quale si svuotano da esso $\frac{2}{3}$ 15 barili, 15 dall'ultimo, cioè $\frac{2}{3}$ 30 da entrambi, che dovrebbero essere 12; quindi si moltiplica 1 per 12 e si divide per $\frac{2}{3}$ 30, il quoziente sar $\frac{9}{23}$ di un giorno. Inoltre si mette 1 giorno per lo svuotamento di 13 barili appena sopra il foro più basso, da cui si svuotano 15 barili, che dovrebbero essere 13; quindi si moltiplica l'1 per il 13, e si divide per il 15; il quoziente sarà $\frac{13}{15}$ di un giorno che sommato a $\frac{9}{23}$, a $\frac{90}{289}$ e a $\frac{120}{409}$ dà 1 giorno e $\frac{1\ \ 13\ \ 16\ \ 12\ \ 144}{5\ \ 17\ \ 17\ \ 23\ \ 409}$ 10 ore per lo svuotamento dell'intera botte.

svuotamento sopra
1° foro $\frac{120}{409}$
2° foro $\frac{90}{289}$
3° foro $\frac{9}{23}$
4° foro $\frac{13}{15}$
totale: 1 giorno e $\frac{1\ \ 13\ \ 16\ \ 12\ \ 144}{5\ \ 17\ \ 17\ \ 23\ \ 409}$ *10 ore*

Ancora su una botte.

Ancora, c'è una botte con 10 fori che viene svuotata dal primo in 1 giorno, dal secondo in $\frac{1}{2}$ di un giorno, dal terzo in $\frac{1}{3}$, dal quarto in $\frac{1}{4}$ e così per gradini in ordine fino al decimo foro, che svuota la botte in $\frac{1}{10}$ di un giorno. Si cerca, se i fori sono tutti aperti, in quanti giorni si svuoterà tutta la botte. Si pone che la botte si svuota in un giorno, durante il quale la botte si svuota una volta dal primo foro, due volte dal secondo foro, perché in mezza giornata si svuota una volta; quindi dal terzo foro si svuota tre volte, dal quarto quattro volte, dal quinto cinque, cioè 5 botti, dal sesto foro si svuotano 6 botti, dal

svuotamento della botte $\frac{1}{55}$ *di giorno*

settimo 7, dall'ottavo 8, dal nono 9, dal decimo 10; quindi in 1 giorno il totale svuotato da tutte i fori è la somma dei numeri da 1 fino a 10, cioè 55 botti; quindi si dice, ho messo 1 giorno e sono state svuotate 55 botti; cosa devo mettere in modo che si svuoti 1 botte? Si moltiplica 1 per 1 e si divide per 55; il quoziente è $\frac{1}{55}$ di un giorno per lo svuotamento dell'intera botte.

Su quattro uomini che noleggiano una nave.

Quattro uomini noleggiano una nave per caricare del grano; ciascuno di essi carica una quota: il primo dà al comandante della nave $\frac{1}{3}$ del grano, il secondo $\frac{1}{4}$, il terzo $\frac{1}{5}$ e il quarto $\frac{1}{6}$, per cui il comandante della nave riceve per il trasporto 1000 moggi; si cerca il carico totale della nave; si pone che una quarta parte dell'intero carico della nave, cioè ogni quota, sia di 60 moggi; quindi l'intero carico della nave sarebbe di 240 moggi. E siccome il primo ha dato $\frac{1}{3}$ del carico, il secondo $\frac{1}{4}$, il terzo $\frac{1}{5}$ e il quarto $\frac{1}{6}$, si prendono $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dei 60, che sono 57 moggi, che dovrebbero essere 1000. Perciò si dice, ho messo 240 moggi per tutto il carico della nave, e risultano 57 moggi per il trasporto; cosa devo mettere in modo che risultino 1000 moggi? Si moltiplica 240 per 1000 e si divide per 57; il quoziente è $\frac{10}{19}$ 4210 moggi per il carico totale della nave.

Il carico della nave

$\frac{10}{19}$ 4210

moggi

Sullo stesso.

E si propone che, dopo aver dato il passaggio, al comandante della nave rimangano 1000 moggi. Allora si sottrae il 57 dal 240; restano 183 moggi, che dovrebbero essere 1000; quindi si moltiplica il 240 per il 1000, e si divide per il 183; il quoziente è $\frac{29}{61}$ 1311 moggi per il carico della nave.

Il carico della nave

$\frac{29}{61}$ 1311

moggi

Su un uomo tenuto in servizio.

Un certo uomo fu tenuto per qualche tempo in servizio. Gli sarebbero stati dati in un mese tre pagamenti in denari, di cui il secondo sarebbe stato di 2 denari in più del primo, e il terzo di 2 denari
in più del secondo, cioè di 4 denari in più del primo. Inoltre gli sarebbero stati dati 10 denari. Tuttavia avvenne che lavorò solo 6 giorni, per i quali il maestro dei lavori gli diede: metà del primo pagamento, un terzo del secondo, e un quarto del terzo; calcolando secondo quanto avvenne in quei giorni che lavorò. Si chiede quali fossero quei pagamenti. Poiché i 6 giorni che ha lavorato sono un quinto di un mese, cioè dei 30 giorni che avrebbe dovuto lavorare, avrebbe dovuto ricevere $\frac{1}{5}$ di tutti e tre i numeri suddetti e 10 denari, e per tale $\frac{1}{5}$, il maestro dei lavori gli ha dato la metà del primo numero, un terzo del secondo e un quarto del terzo; è chiaro che, sottraendo 2 dal secondo numero e 4 dal terzo, ciascuno di essi sarà uguale al primo numero. Si sottrae quindi 2 dal secondo e 4 dal terzo; se prendiamo metà del primo, un terzo del secondo, e un quarto del terzo, allora prendiamo $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ del primo numero; poi prendiamo $\frac{1}{3}$ dei 2 denari di cui il secondo supera il primo, e $\frac{1}{4}$ dei 4 di cui il terzo supera il primo; si ha $\frac{2}{3}$ 1; perciò il maestro dei lavori gli diede $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ del primo numero, e aggiunse a questo $\frac{2}{3}$ 1 denari, e questo fu proprio come se gli avesse dato $\frac{1}{5}$ di tutti e tre i numeri e 10 denari; e ancora, si sottrae 2 dal secondo numero, e 4 dal terzo, e si prende $\frac{1}{5}$ del primo numero, del secondo, e del terzo; questo importo è lo stesso che si ha se prendiamo $\frac{3}{5}$ del primo numero; resta da prendere $\frac{1}{5}$ dei 2 denari sottratti dal secondo numero, dei 4 sottratti dal terzo, e dei 10, cioè di 16 in tutto; si ha $\frac{1}{5}$ 3; quindi l'operaio ha ricevuto $\frac{3}{5}$ del primo numero e inoltre $\frac{1}{5}$ 3 denari, per i quali riceve

$\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ dello stesso primo numero, e inoltre $\frac{2}{3}$ 1 denari; quindi si sottrae $\frac{2}{3}$ 1 da $\frac{1}{5}$ 3; rimane $\frac{8}{15}$ 1; quindi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ del primo numero è $\frac{8}{15}$ 1 in più di $\frac{3}{5}$ dello stesso numero. Per cui si trova un numero in modo che quando $\frac{3}{5}$ di esso viene sottratto da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ dello stesso numero, rimane $\frac{8}{15}$ 1. Si pone che il numero sia 60; di questo si prendono $\frac{3}{5}$, cioè 36, che si sottrae da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ di 60, cioè da 65; rimane 29 che dovrebbe essere $\frac{8}{15}$ 1; si moltiplica quindi il 60 per $\frac{8}{15}$ 1; si ha 92 che si divide per 29; il quoziente sarà $\frac{5}{29}$ 3 denari per il primo numero, a cui si aggiunge 2; per il secondo numero si hanno $\frac{5}{29}$ 5 a cui si aggiunge ancora 2, e si hanno $\frac{5}{29}$ 7 denari per il terzo numero.

primo
$\frac{5}{29}$ 3
secondo
$\frac{5}{29}$ 5
terzo
$\frac{5}{29}$ 7

Su un numero a cui si aggiunge $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, e 12, e da questo si sottrae $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ di esso, e 12, e non rimane nulla.

C'è un numero a cui se si aggiungi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso e 12, e dalla somma si sottrae $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ e 12, allora non rimane nulla. Si cerca qual'è il numero. Prima si cerca qual è il numero da cui se si sottrae $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ di esso e 12, allora non rimane nulla. Poniamo che sia 30, da cui si sottrae $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ di esso, cioè 17, e rimane 13 che dovrebbe essere 12; si moltiplica il 12 per il 30; si ha 360 che si divide per 13; il quoziente è $\frac{9}{13}$ 27; per questo numero, si dice, c'è un numero al quale se ne aggiungi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso e 12, allora si ha $\frac{9}{13}$; quindi se si sottrae il 12 da $\frac{9}{13}$ 27, rimane $\frac{9}{13}$ 15; poi si mette che il numero sia 12 a cui si aggiunge

numero
$\frac{4\ \ 17}{13\ \ 19}$ 9

$\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di esso; si ha 19 che dovrebbe essere $\frac{9}{13}$ 15; quindi si moltiplica il 12 per $\frac{9}{13}$ 15, e si divide per il 19; il quoziente è $\frac{4\ \ 17}{13\ \ 19}$ 9, e questo è il numero. Esempio: prendiamo $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di $\frac{4\ \ 17}{13\ \ 19}$ 9, in questo modo: si moltiplica il 9 per il 19, si aggiunge il 17, si moltiplica per il 13, e si aggiunge il 4; si ha 1448 a cui si aggiunge $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di esso, che è il 1428; si ha 3876 che si divide per $\frac{1\ \ 0}{19\ \ 13}$; e si divide prima per il 19, poi per il 13, perché il 3876 è integralmente divisibile per il 19; il quoziente è $\frac{9}{13}$ a cui si aggiunge il 12; si ha $\frac{9}{13}$ 27 da cui si sottrae $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ di esso che è $\frac{9}{13}$ 15; resta 12 da cui se si sottrae 12 non resta nulla, e questa è la proposizione.

Su un numero a cui si aggiunge $\frac{1\ 3}{9\ 7}$ *di esso e* 60.

Ancora, c'è un numero a cui se aggiungi $\frac{1\ 3}{9\ 7}$ di esso e 60 denari, e sottrai dalla somma $\frac{1\ 1\ 1}{8\ 5\ 3}$ di esso e 60 denari, non resta nulla; si trova il numero da cui se si sottrae $\frac{1\ 1\ 1}{8\ 5\ 3}$ di esso, allora rimane 60; questo numero è $\frac{25}{41}$ 175 da cui sottraendo 60 rimane $\frac{25}{41}$ 115; da questo si trova il numero al quale se si aggiunge $\frac{1\ 3}{9\ 7}$ di esso, si ha $\frac{25}{41}$ 115, che si trova così: si mette che il numero è 63 di cui prendono $\frac{3}{7}$ cioè 27, e $\frac{1}{9}$ cioè 7, che sommati a 63 danno 97, che dovrebbe essere 115. Per cui, il 63 viene moltiplicato per il 115, e diviso per il 97; il quoziente è $\frac{17\ \ 8}{41\ \ 97}$ 75 per il numero cercato.

Ancora un altro problema simile.

Ancora, c'è un numero al quale se si aggiunge $\frac{4}{9}\frac{3}{7}\frac{2}{5}$ del numero, e $\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ del secondo numero, e il doppio di qualsiasi numero si voglia, e dalla somma si sottrae $\frac{3}{11}\frac{2}{9}\frac{2}{7}$ della somma, tre volte il secondo numero e $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$ del secondo numero, allora non rimane nulla; prima si trova il numero che deve essere aggiunto al primo, e sottratto alla fine, che si trova così: si vede quale numero è il minimo comune denominatore di $\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$; è 45, e lo si mette per il numero che è stato proposto alla fine, che è stato sottratto tre volte e $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$ di esso; si moltiplica il 45 per il 3, cioè 135; a cui si aggiunge $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$ del 45, cioè 14; si ha 149; poi si trova con la seconda regola dell'albero qual'è il numero da cui sottraendo $\frac{3}{11}\frac{2}{9}\frac{2}{7}$ di esso rimane 149, ed applicando la regola dell'albero, si trova $\frac{1\ \ 6}{8\ \ 19}$ 679 da cui si sottrae due volte 45, e $\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ di 45, cioè 114; rimane $\frac{1\ \ 6}{8\ \ 19}$ 565, per cui si vede dalla terza regola dell'albero qual'è il numero a cui, se aggiungi $\frac{4}{9}\frac{3}{7}\frac{2}{5}$ di esso, si ha $\frac{1\ \ 6}{8\ \ 19}$ 565, e si ha il numero $\frac{3\ \ 4\ \ 2\ \ 27}{4\ \ 8\ \ 9\ \ 179}$ 248, e queste sono le regole con cui operare.

numero

$\frac{3\ \ 4\ \ 2\ \ 27}{4\ \ 8\ \ 9\ \ 179}$ 248

Un problema proposto da un certo maestro di Costantinopoli.

Prendi $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$ di un numero, e poi da questo numero sottrai $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$ di esso, e separi in due parti ciò che rimane, e moltiplichi una parte per $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$ e l'altra per $\frac{4}{9}\frac{1}{2}$, e i prodotti sono uguali. Si fa così: si mette un numero in modo che lo si possa prendere integralmente e anche sottrarre integralmente, e tale numero è 81 da cui si prende $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$, cioè 36, e si sottrae ancora $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$ di esso, vale a dire 16; rimane 20 che si

separa in due parti in modo che una di esse moltiplicata per $\frac{4}{9}\frac{1}{2}$, sia uguale all'altra per $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$. Perciò, utilizzando la regola dell'albero, si mette che una parte sia 18 che moltiplicato per $\frac{4}{9}\frac{1}{2}$ fa 17; poi vede dalla prima regola degli alberi qual è il numero per cui 17 è $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$ di esso, ed è il numero $\frac{4}{9}$ 26 che si aggiunge al 18; si ha $\frac{4}{9}$ 44 che dovrebbe essere 20. Quindi si moltiplica il 18 per il 20, e si divide per il $\frac{4}{9}$ 44; il quoziente è $\frac{1}{10}$ 8 per la prima parte, che sottratta da 20 dà $\frac{9}{10}$ 11 che è l'altra parte.

prima parte

$\frac{1}{10}$ 8

seconda parte

$\frac{9}{10}$ 11

Su una coppa la cui base è una terza parte dell'intera coppa e la parte superiore è la quarta.

La base di una certa coppa pesa un terzo dell'intera coppa; il top pesa un quarto; il resto pesa 15 libbre; si cerca qual è il peso di tutta la coppa; questo problema è simile al problema dell'albero quando $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso giaceva sotto terra, e c'erano 15 palmi sopra il suolo. In questo esempio la base della coppa è $\frac{1}{3}$, e la parte superiore è $\frac{1}{4}$ di tutta la coppa, quindi la base e la parte superiore sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'intera coppa. E quello che rimane pesa 15 libbre. Quindi, poiché si cerca il peso dell'intera coppa, si mette, secondo la stessa regola dell'albero, che pesa un certo numero, cioè un numero per il quale le frazioni $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ di esso sono intere; questo numero è 12. Perciò si mette che la coppa pesa 12 libbre; per il fatto che è un terzo, la base pesa 4 libbre, e la cima, siccome è $\frac{1}{4}$, pesa 3 libbre. Quindi la base e la cima insieme pesano 7 libbre, che sottratte dalle 12 danno 5 libbre per il resto della coppa, che dovrebbero essere 15 libbre. Si moltiplica il 12 per il 15 e si divide per il 5, e quindi risultano 36 libbre per il peso dell'intera coppa.

Peso della coppa

36

base

12

top

9

Ancora su una coppa.

Ora si dice che la base pesa $\frac{1}{3}$ del centro e della sommità, e la sommità pesa come il centro e la base; il centro pesa 15 libbre; ciò posto, se si vuole usare la stessa regola degli alberi, si fa così: la base pesa $\frac{1}{3}$ del centro e della sommità. E se la parte superiore e quella centrale insieme pesano 3 libbre, allora la base pesa 1 libbra; quindi la base è $\frac{1}{4}$ dell'intera coppa. E lo stesso se la sommità è $\frac{1}{4}$ del centro e della base; se il centro e la base pesano 4 libbre, allora la sommità pesa 1 libbra, cioè $\frac{1}{5}$ dell'intera coppa; e così la base e la sommità sono $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'intera coppa; quindi si trova un numero che è il minimo comune denominatore di $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, che è 20, che risulta dalla moltiplicazione del 4 e del 5, da cui si sottrae $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ di esso, cioè 9; si ha 11. Quindi si moltiplica il 20 per il 15; si ha 300 che si divide per 11; il quoziente sarà $\frac{3}{11}$ 27 libbre per il peso dell'intera coppa. Se si vuole trovare ciascuna delle parti, essendo la base $\frac{1}{4}$ di tutta la coppa, si prende $\frac{1}{4}$ di 20, cioè 5 che simoltiplica per 15; si ha 75 che si divide per 11; il quoziente sarà $\frac{9}{11}$ 6 libbre per il peso della base. Siccome la parte superiore è $\frac{1}{5}$ di tutta la coppa, si prende $\frac{1}{5}$ del 20, cioè 4, che si moltiplica per 15; si ha 60 che si divide per 11; il quoziente è $\frac{5}{11}$ 5 libbre per il peso della parte superiore.

coppa	
$\frac{3}{11}$	27
base	
$\frac{9}{11}$	6
top	
$\frac{5}{11}$	5

Ancora su una coppa.

Ancora c'è una coppa la cui base è $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ della parte superiore e centrale. La parte superiore è $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ della centrale e della base; la parte centrale della tazza pesa 6 libbre. Si cerca quale sia il peso della base e

del top; la base è $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del resto; quindi se il resto pesa 12 libbre e la base pesa 7 libbre, allora l'intera tazza pesa 19 libbre; quindi la base pesa $\frac{7}{19}$ della coppa totale; la parte superiore è $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ del resto per lo stesso motivo; ed è $\frac{11}{41}$ di tutta la coppa. Per cui si scrive nell'ordine $\frac{11}{41}\frac{7}{19}$, e si moltiplica il 7 che è sopra il 19 per il 41; si ha 287. Inoltre si moltiplica l'11 che è sopra il 41 per il 19; si ha 209 che si aggiunge al 287; si ha 496, e si moltiplica il 19 per il 41; si ha 779 da cui si sottrae il 496; rimane 283; si moltiplica il 779 per il 6; si ha 4674 che si divide per 283; il quoziente è $\frac{146}{283}$ 16 libbre per il peso dell'intera coppa, e se si moltiplica 287 per 6 e si divide per 283, si trova $\frac{24}{283}$ 6 libbre per il peso della base. Di nuovo, se si moltiplica 209 per 6 e si divide per 283, si trova $\frac{123}{283}$ 4 libbre per il peso della parte superiore.

$\frac{146}{283}$ 16

$\frac{24}{283}$ 6

$\frac{123}{283}$ 4

Su quattro uomini che hanno dei denari.

Quattro uomini hanno dei denari; e i denari del primo sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dei denari degli altri tre; inoltre i denari del secondo sono $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ degli altri tre; i denari del terzo, invece, sono $\frac{1}{8}\frac{1}{7}$ degli altri tre; e i denari del quarto sono 27. Si cerca quanti denari ha ciascuno dei tre uomini rimasti; questo problema usa la stessa regola della coppa, così: poiché i denari del primo uomo sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dei denari dei restanti tre uomini, egli ha quindi $\frac{7}{19}$ della somma di tutti e quattro gli uomini. Per lo stesso motivo il secondo ha $\frac{11}{41}$ dello stesso totale. E il terzo ha $\frac{1}{8}\frac{1}{7}$ dei restanti tre; quindi se i tre hanno 56 denari, e lui ne ha $\frac{1}{8}\frac{1}{7}$, allora ha 15 denari; quindi ci sono 71 denari tra tutti loro, di cui egli ha $\frac{15}{71}$; quindi assimilando questo al problema dell'albero o numero,

si sottrae $\frac{15}{71}\frac{11}{41}\frac{7}{19}$; rimane 27; si moltiplica il 7 che sta sopra il 19 per il 41 e il 71; si ha 20377 che si scrive sopra il $\frac{7}{19}$. Di nuovo si moltiplichi l'11 che è sopra il 41 per il 71, e il 19; si ha 14839 che si scrive sopra $\frac{11}{41}$. Di nuovo moltiplica il 15 che sta sopra il 71 per il 41, e il 19; si ha 11685 che si scrive sopra il $\frac{15}{71}$. Si aggiunge quindi il 20377, il 14839, e il 11685; si ha 46901 che si sottrae dal prodotto di 19, 41 e 71, cioè da 55309; resta 8408, per cui si trova la regola, cioè $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$. E si moltiplica il 20377 per il 27; si ha 550179 che si divide col $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$; il quoziente è $\frac{3\ \ 457}{8\ \ 1051}$ 65 denari, e tanto ha il primo uomo. Inoltre si moltiplica il 14839 per il 27; si ha 400653 che si divide col $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$; il quoziente è $\frac{5\ \ 684}{8\ \ 1051}$ 47 denari, e tanto ha il secondo uomo. Inoltre si moltiplica il 11685 per il 27; si ha 315495 che si divide col $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$; il quoziente è $\frac{7\ \ 549}{8\ \ 1051}$ 37 denari, e tanto ha il terzo.

primo	*secondo*	*terzo*
$\frac{3\ \ 457}{8\ \ 1051}$ 65	$\frac{5\ \ 684}{8\ \ 1051}$ 47	$\frac{7\ \ 549}{8\ \ 1051}$ 37

Su due uomini che hanno dei denari, uno dei quali prende una certa quantità dall'altro in modo che uno superi l'altro in una certa proporzione.

Due uomini hanno dei denari, e uno dice all'altro: se mi dai uno dei tuoi denari, allora i miei saranno uguali ai tuoi. L'altro risponde: e se mi dai uno dei tuoi denari, ne avrò dieci volte tanto quanto te. Si cerca quanti ne ha ciascuno. Questo, come si vede, si può ridurre al metodo dell'albero: poiché il primo, avendo un numero di denari dall'altro, propone che abbiano un numero uguale di denari, e quindi lui, avendo 1 denaro, abbia la metà della somma totale di denari, come si fa con gli alberi, si scrive $\frac{1}{2}$. Inoltre, poiché l'altro uomo, avendo 1 denaro dal primo, dice che ha dieci volte tanto quanto il primo, si mette che ne ha 10, e il primo ne ha 1; quindi tra loro due ne hanno 11 di cui il secondo ne ha 10; quindi si afferma che della somma totale di entrambi egli ha i $\frac{10}{11}$. Quindi uno ha $\frac{1}{2}$ della somma totale, e

l'altro ne ha $\frac{10}{11}$, avendo avuto il denaro chiesto. Perciò si dice: c'è un albero per cui $\frac{1}{2}$ e $\frac{10}{11}$ di esso, superano la lunghezza dell'albero di 2 palmi, cioè di quanto ciascuno chiede all'altro. Secondo il metodo dell'albero, si moltiplica l'1 che è sopra il 2 per l'11; si ha 11, e si moltiplica il 10 che è sopra l'11 per il 2; si ha 20 che si aggiunge agli 11; si ha 31, e si moltiplica il 2 per l'11 e fa 22 che si sottrae dal 31; rimane 9 che dovrebbe essere 2; perciò si moltiplica il 2, cioè la somma di entrambi i denari, per 11; si ha 22 che si divide per 9; il quoziente è $\frac{4}{9}$ 2, e il primo ha questo totale dopo aver preso un denaro dall'altro. Quindi il primo ha $\frac{4}{9}$ 1 denari. Ancora si moltiplica lo stesso 2 per 20; si ha 40 che si divide per 9; il quoziente è $\frac{4}{9}$ 4 denari, e l'altro ha questo totale dopo aver ricevuto un denaro dall'altro; quindi ha $\frac{4}{9}$ 3 denari.

primo
$\frac{4}{9}$ 1
secondo
$\frac{4}{9}$ 3

Sulla stessa cosa.

La stessa cosa si trova in un altro modo. Il secondo uomo, avendo 1 dei denari del primo uomo, propone di avere dieci volte tanto quanto il primo; si sottrae l'1 dal 10; ne rimangono 9; il primo uomo ha $\frac{4}{9}$ 1 denari, e l'altro ha $\frac{4}{9}$ 3 denari, e se dici che ha dodici volte il primo, allo stesso modo sottrai 1 dal 12; rimane 11, e quindi un uomo ha $\frac{4}{11}$ 1, e l'altro ha $\frac{4}{11}$ 3. E così puoi fare con qualsiasi domanda simile.

Un problema sulla stessa cosa
propostoci da un maestro vicino a Costantinopoli.

a e g d b

Inoltre si propone che un uomo prenda 7 denari dall'altro, e avrà cinque volte il secondo uomo. E il secondo uomo prende 5 denari dal primo, e avrà sette volte i denari del primo. La soluzione di questo problema si riduce al secondo metodo degli alberi, e affinché si veda ancor più chiaramente, sia la somma dei denari di entrambi il segmento .ab., di cui .ag. è la prima parte; quindi .gb. sarà la parte del

secondo, e il punto .d. è segnato sul segmento .gb. in modo che .gd. è 7, e il punto .e. è segnato sul segmento .ag. in modo che ad .eg. è 5. E poiché il primo prende 7 dal secondo, cioè il numero .gd., e la sua parte è il numero .ag., se ad esso si aggiunge il 7, allora avrà il numero .ad. che si propone essere cinque volte i restanti denari del secondo uomo, cioè il numero .db.; quindi, se il numero .ad. è diviso in cinque parti uguali, ogni parte sarà uguale al numero .db.; quindi .db. è una sesta parte dell'intero numero .ab., cioè della somma dei denari di entrambi gli uomini. Ancora, se 5 denari dai denari del primo uomo, cioè .ge., vengono aggiunti ai denari del secondo uomo, cioè al numero .bg., allora il secondo uomo avrà il numero .be., e il numero .ea. resterà per il primo. E poiché il secondo, avendo 5 denari del primo, ha sette volte il denari del primo, il numero .be. sarà sette volte il numero .ea.; quindi .ea. È $\frac{1}{8}$ dell'intero numero .ab.; è stato già mostrato che il numero .bd. È $\frac{1}{6}$ del numero .ab.; quindi il numero .bd. ed .ea. sommati insieme sono $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ dell'intero numero .ab.; quindi se dal numero .ab. si sottrae $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ di esso, cioè i numeri .bd. ed .ea., allora rimarrà il numero .ed. che è 12 perché .eg. è 5, e .gd. è 7, e quindi, secondo il metodo dell'albero, si mette che il numero .ab. è 24 di cui $\frac{1}{6}$ cioè 4, sarà il numero .bd., e di cui $\frac{1}{8}$ cioè 3, sarà il numero .ea.; quindi se dal numero posto per .ba., cioè 24, vengono sottratti i numeri posti per .bd. ed .ea., cioè il 4 e il 3, resterà 17 per il numero .ed. che dovrebbe essere 12; quindi come il 17 sta a .de., cioè 12, così il 24 sta al numero .ab., e il 4 sta al numero .bd., e il 3 sta al numero .ea.; quindi se moltiplichiamo il 24 per il 12, e dividiamo per il 17, avremo il numero .ab.; analogamente se moltiplichiamo il 4 per il 12, e dividiamo per il 17, allora risulterà $\frac{14}{17}$ 2 per il numero .bd.; a questo si aggiunge 7, cioè .dg.; si avrà .bg., cioè $\frac{14}{17}$ 9 denari per il secondo uomo. Ancora, se il prodotto del 12 per il 3 viene diviso per il 17, allora risulterà $\frac{2}{17}$ 2 per il numero .ae.; a questo, se viene aggiunto 5, vale a dire .es., allora risulta $\frac{2}{17}$ 7 per il numero .ag., e tanto ha il primo uomo.

Sullo stesso secondo il metodo diretto.

Nella risoluzione dei problemi c'è un certo metodo chiamato diretto che è usato dagli arabi, è un metodo lodevole e prezioso, perché con esso si risolvono molti problemi; se si vuole usare il metodo in questo problema, allora si mette che il secondo uomo ha una cosa e i 7 denari che prende il primo uomo, e si capisce che la cosa[1] è sconosciuta e si vuole trovarla, e poiché il primo uomo, avendo i 7 denari, ne ha cinque volte il secondo uomo, ne consegue necessariamente che il primo uomo ha cinque cose meno 7 denari, perché avrà 7 denari dal secondo; qindi avrà cinque cose intere, e al secondo resterà una cosa, così il primo ne avrà cinque volte; quindi se dalla porzione del primo uomo si aggiunge 5 alla seconda che prende, allora il secondo avrà 12 denari e una cosa, e al primo resteranno cinque cose meno 12 denari, e così il secondo avrà sette volte il primo; questo perché una cosa e 12 denari sono sette volte cinque cose meno 12 denari; quindi si moltiplicano cinque cose meno 12 denari per 7, ottenendo 35 cose meno 7 soldi, che è uguale a una cosa e un soldo; perciò, se ad entrambe le parti si aggiungono 7 soldi, allora saranno trentacinque cose uguali a una cosa e 8 soldi, perché se si aggiungono uguali a uguali, il risultato sarà uguale. Di nuovo, se uguali vengono sottratti da uguali, quelli che rimangono saranno uguali; se dalle due parti sopra scritte si sottrae una cosa, rimarranno 34 cose pari a 8 soldi; quindi dividendo gli 8 soldi per 34, si hanno $\frac{1}{17}$ 2 denari per ogni cosa; quindi il secondo ha $\frac{14}{17}$ 9 denari, avendo una cosa e 7 denari. Similmente se da cinque cose, cioè dal prodotto di $\frac{14}{17}$ 2 per 5, vengono sottratti 7 denari, allora resteranno $\frac{2}{17}$ 7 denari per il secondo uomo, come abbiamo trovato sopra; con questo terzo metodo si possono risolvere tutti i seguenti problemi di due uomini.

(1) *è l'incognita x delle equazioni algebriche*

Sulla stessa cosa.

Inoltre si propone che un uomo prende 6 denari da un altro uomo, e dice che ha cinque e un quarto volte quanto l'altro, e l'altro prende 4

denari dal primo, ed ha sette e due terzi volte quanto il primo; poiché il primo dichiara di avere cinque e un quarto volte l'altro, allora se il primo ha $\frac{1}{4}$ 5, l'altro avrà 1; perciò tra di loro hanno $\frac{1}{4}$ 6, di cui il secondo ha una parte e il primo ha l'altra parte; si fanno quarti di $\frac{1}{4}$ 5, si ha $\frac{25}{4}$; allo stesso modo si fanno quarti di 1; sono 4; quindi quando il secondo uomo dà 6 denari al primo, rimane con $\frac{4}{25}$ della somma dei loro denari. Per lo stesso motivo, se il primo dà 4 denari al secondo, ha $\frac{3}{26}$ rimanenti; perciò si dice: c'è un 3 da cui, se si sottrae $\frac{3}{26}\frac{4}{25}$ allora rimangono 6 e 4, cioè 10. Quindi si moltiplica il 4 per il 26; si ha 104, e il 3 per il 25; si ha 75 che si aggiunge al 104; si ha 179 che si sottrarre dal prodotto del 25 per il 26, cioè da 650; rimane 471; si divide il prodotto del 104 per il 10 con il 471, e si hanno $\frac{2\ \ 32}{3\ \ 157}$ 2 denari, e questo rimane per il secondo uomo, dati i 6 denari al primo; sommati questi, si hanno $\frac{2\ \ 32}{3\ \ 157}$ 8 denari, e tanti ne ha il secondo uomo. Inoltre, si moltiplica il 10 per 75, e si divide con $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 157}$; il quoziente è $\frac{0\ \ 93}{3\ \ 157}$ 1 denari che sommati ai 4 denari che il secondo uomo prende dal primo danno $\frac{93}{157}$ 5 denari, e questo ha il primo uomo.

Un altro metodo su due uomini.

Anche in questo caso il primo uomo, avendo 7 denari dal secondo, ha cinque volte il secondo e 1 denaro in più. E il secondo, avendo 5 denari dal primo, ha sette volte il primo, e 1 denaro di più; la somma di tutti i denari dei due uomini si chiama somma maggiore, dalla quale sottraendo il denaro del quale ciascuno supera l'altro si ottiene quella che si chiama somma minore, e poiché il primo avendo 7 denari dal secondo ne ha uno in più di cinque volte il secondo, questo denaro viene quindi sottratto dai 7 denari, e tenendolo da parte, il primo uomo avrà con i restanti 6 denari cinque volte il secondo; essi hanno infatti insieme, sottraendo il denaro sopra scritto, la suddetta somma minore,

della quale il primo, avendo i soprascritti 6 denari, ha cinque volte il secondo, cioè cinque parti della stessa somma minore, e il secondo ha una parte; perciò il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma minore meno i 6 denari, e il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma minore, e i 7 denari in più che dà al primo; similmente, se si opera con l'acquisizione del secondo, si trova che il secondo uomo ha $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 4 denari, e il primo ha 5 denari in più di $\frac{1}{8}$ della stessa somma; il primo ha infatti 6 denari in meno di $\frac{5}{6}$ della stessa somma minore. Quindi tra loro hanno $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 e 4 denari, cioè 10 denari, e hanno ancora la somma maggiore; quindi $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ la somma minore meno 10 denari sono tanti quanto la somma maggiore. Per cui, se si sottrae 1 da entrambe dette parti uguali, delle quali una è $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ la somma minore meno 10 denari, e l'altra è la somma maggiore, allora resterà $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ la somma minore meno 11 denari, pari alla somma minore, poichè la somma minore è la maggiore meno 1; quindi la somma minore e 11 denari sono tanti quanto $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ la stessa somma. Quindi si trova il numero che sottratto a $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ di esso, dà 11; si mette che sia 24, di cui $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$, è 20 più 21, cioè 41; si sottrae il 24 lasciando 17, che dovrebbe essere 11; si moltiplica $\frac{5}{6}$ 24, cioè 20, per 11, e si divide per 17; il quoziente sarà $\frac{16}{17}$ 12 per $\frac{5}{6}$ della somma minore, da cui si sottrae il 6 che ha il primo; rimangono $\frac{16}{17}$ 6 denari, e tanti ne ha il primo uomo. Inoltre si moltiplica il $\frac{7}{8}$ 24, cioè 21, per l'11, e si divide per il 17, e si ha $\frac{10}{17}$ 13 per $\frac{7}{8}$ della somma minore, da cui si sottrae il 4 che ha il secondo uomo; rimangono $\frac{10}{17}$ 9 denari, e tanti ne ha il secondo uomo.

Sullo stesso.

Ancora, in un altro modo, il primo uomo ha $\frac{1}{8}$ della somma minore e 5 denari in più, il secondo 7 denari in più di $\frac{1}{6}$ della stessa somma; perciò essi hanno insieme $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore, e 12 denari in più, ed hanno inoltre la somma maggiore; quindi $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore con 12 denari fanno la somma maggiore, e $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore con 11 denari fanno la somma minore. Per cui, se $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore viene sottratto dalla stessa somma, allora rimarrà 11. Perciò si pone che la somma sia 24, da cui si sottrae $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ di essa; rimane 17, che dovrebbe essere 11; si moltiplica $\frac{1}{8}$ 24, cioè 3 per 11, e si divide per 17; il quoziente sarà $\frac{16}{17}$ 1 per $\frac{1}{8}$ della somma minore; perché questa è una parte del 24, la si moltiplica per l'11 e si divide per il 17 e si trova tale parte della somma minore; a questi $\frac{16}{17}$ 1 si aggiungono i 5 denari che ha il primo più di detto $\frac{1}{8}$, ottenendo $\frac{16}{17}$ 6 denari per il primo, come abbiamo trovato sopra con altro metodo. Allo stesso modo si moltiplica il 3, cioè $\frac{1}{8}$ di 24, per 11, si divide per 17 e si aggiunge il 7, ottenendo $\frac{16}{17}$ 8, cioè i denari del secondo uomo.

Sullo stesso.

Ancora, in un altro modo, il primo uomo ha $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 denari, ovvero $\frac{1}{8}$ della stessa somma più 5 denari; per cui, la somma minore meno 6 denari è quanto $\frac{1}{8}$ della stessa somma più 5 denari. Quindi se si aggiungono 6 denari a ciascuna porzione, $\frac{5}{6}$ la

somma minore sarà pari a $\frac{1}{8}$ la stessa somma più 11 denari; così la somma minore si sottrae alla somma minore, e resta 11; quindi si pone che la somma sia 24, dai cui $\frac{5}{6}$, cioè 20, si sottrae $\frac{1}{8}$, cioè 3; rimane 17 che dovrebbe essere 11; si moltiplica $\frac{5}{6}$ 24, cioè 20, per 11, si divide per 17 e si sottrae 6, oppure si moltiplica $\frac{1}{8}$ 24 per 11, si divide per 17 e siaggiunge il 5, e si avranno i denari del primo uomo. Similmente il secondo uomo ha $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 4 denari, ovvero 7 denari in più di $\frac{1}{6}$ della stessa somma; se ad entrambe le parti si aggiunge 4, allora si avrà $\frac{7}{8}$ della somma minore uguale a 11 denari più di $\frac{1}{6}$ della stessa somma. Quindi se si sottrae la somma minore dalla somma minore, rimangono 11 denari; similmente si mette che questa somma sia 24, dai cui $\frac{7}{8}$, cioè 21, si sottrae $\frac{1}{6}$, cioè 4; rimane 17 che dovrebbe essere 11; si moltiplica il 21 per 11, si divide per 17, e poi si sottrae il 4 che il secondo ha di meno, oppure si moltiplica il 4, cioè $\frac{1}{6}$ di 24, per l'11 , e si divide per 17, e a questo si aggiunge il 7, e si avranno i denari del secondo uomo. Tuttavia, da quanto detto, si trova che problemi simili sono risolvibili o irrisolvibili: possono essere risolti purchè ciascun uomo ugualmente superi il prodotto da un denaro fino a 11 denari; dopo undici denari i problemi diventano irrisolvibili. Ad esempio, il primo prende 7 denari dal secondo, e ne ha 12 più di cinque volte il secondo. Analogamente il secondo prende 5 denari dal primo, e ne ha sette volte il primo, e 12 denari in più. Come abbiamo detto prima, tutti i denari di entrambi sono detti la somma maggiore. Dodici denari in meno si dicono la somma minore, in quanto uno supera l'altro di 12. E poiché il primo, avendo 7 denari dal secondo, ha cinque volte il secondo, e 12 denari in più, è necessario che il primo abbia $\frac{5}{6}$ della somma minore più 12 denari; per cui, togliendo 12 e 7 denari del secondo, rimangono la quota del primo uomo, $\frac{5}{6}$ della somma minore più 5. Similmente si

trova che la quota del secondo uomo è 7 denari più $\frac{7}{8}$ della somma minore; perciò insieme hanno $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore, e 12 denari, e hanno ancora similmente 12 denari più la somma minore; quindi $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore più 12 denari sono tanti quanto la somma maggiore, e poiché se si prendono uguali da uguali quelli che rimangono sono uguali, se si prende 12 da entrambe le parti, si avrà che $\frac{7}{8}$ della somma minore sarà uguale alla stessa somma minore, il che è impossibile; o in altro modo, il secondo dà 7 denari al primo, e gli rimane $\frac{1}{6}$ della somma minore; quindi la sua parte è 7 denari in più $\frac{1}{6}$ della somma minore. Abbiamo scoperto sopra che la sua porzione era di 7 denari più $\frac{7}{8}$ della somma minore. Quindi $\frac{1}{6}$ della somma minore e 7 denari sono tanti quanto $\frac{7}{8}$ della stessa somma più 7 denari; i 7 sono infatti uguali; rimane quindi $\frac{1}{6}$ della somma minore uguale a $\frac{7}{8}$ della stessa somma, il che è di nuovo impossibile. Si trova inoltre, nella parte del primo uomo, che $\frac{1}{8}$ della somma minore è uguale $\frac{5}{6}$ della stessa somma, il che è impossibile. Allo stesso modo molti problemi si mostrano inconsistenti; per problemi consistenti non si possono superare i 12 denari.

Un terzo metodo per il problema dei due uomini.

Anche in questo caso il primo prende 7 dal secondo, e ha 1 più di cinque volte il secondo. Il secondo prende 5 dal primo e ne ha 2 in più di sette volte il primo. In questo problema si considerano tre somme, delle quali la maggiore è la somma di tutti i denari di entrambi gli uomini; la somma intermedia è 1 in meno della maggiore; la somma minore è 2 in meno della somma maggiore, o 1 in meno della somma intermedia. E siccome il primo uomo con 7 denari del secondo ne ha cinque volte il secondo e 1 in più, il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma

intermedia meno 6 denari, e il secondo uomo deve avere $\frac{1}{6}$ della stessa somma, e 7 denari in più. Allo stesso modo poiché il secondo con 5 denari del primo, ha sette volte il primo e altri 2, alla somma maggiore si sottraggono i 2 denari rimane la somma minore, di cui il secondo con 3 denari del primo, ha sette volte il primo, cioè $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 3 denari; perciò il primo ha $\frac{1}{8}$ della stessa somma minore e 7 denari in più, cioè quelli che dà al secondo; terminato tutto questo, entrambe le quote possono essere ridotte a parti di una qualsiasi delle tre suddette somme; riduciamo quindi la prima a parti della somma minore. Poiché la somma intermedia è 1 denaro in più della somma minore, $\frac{5}{6}$ della somma intermedia è $\frac{5}{6}$ di un denaro più $\frac{5}{6}$ della somma minore; quindi $\frac{5}{6}$ della somma minore e $\frac{5}{6}$ di un denaro sono quanto $\frac{5}{6}$ della somma intermedia, e il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma intermedia meno 6 denari; perciò egli ha $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 denari più $\frac{5}{6}$ di un denaro. Quindi da $\frac{5}{6}$ di un denaro si sottraggono 6 denari; restano $\frac{1}{6}$ 5 denari; quindi il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma minore meno $\frac{1}{6}$ 5 denari; perciò il secondo ha $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 3 denari, come abbiamo trovato; quindi insieme hanno $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore meno $\frac{1}{6}$ 8 denari. E hanno ancora la somma maggiore, cioè 2 più la somma minore. Da cui è chiaro che $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore meno $\frac{1}{6}$ 8 denari sono tanti quanto la somma minore più 2 denari. Il 2 viene sottratto da entrambe le porzioni; rimane la somma minore, uguale a $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ di se stessa meno $\frac{1}{6}$ 10 denari; e si trova l'ammontare $\frac{1}{6}$ 10, del quale $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma eccede la somma. Poniamo dunque che la somma è 24, di cui $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$, cioè 41, supera il 24 di 17; il 17 dovrebbe

essere $\frac{1}{6}$ 10. Si moltiplica $\frac{1}{6}$ 10 per $\frac{5}{6}$ di 24, cioè per 20, e si divide per il 17; per $\frac{5}{6}$ della somma minore il quoziente sarà $\frac{1\ \ 16}{3\ \ 17}$ 11, da cui si sottrae $\frac{1}{6}$ 5 che il primo ha meno dei $\frac{5}{6}$ della somma minore; resterà $\frac{27}{34}$ 6, e tanto ha il primo. Inoltre, si moltiplica $\frac{1}{6}$ 10 per $\frac{7}{8}$ di 24, cioè per 21, si divide per il 17, e dal quoziente si sottrae il 3 che il secondo ha meno di $\frac{7}{8}$ della somma minore; il risultato sarà $\frac{19}{34}$ 9.

Ancora, volendo ridurre le quote a parti della somma intermedia, di cui il primo ha $\frac{5}{6}$ meno 6 denari, e il secondo ha $\frac{7}{8}$ meno la somma minore meno 3 denari, allora avrà $\frac{7}{8}$ della somma intermedia meno 3 denari, e meno $\frac{7}{8}$ di un denaro; poiché un denaro è la differenza tra la somma intermedia e la somma minore, $\frac{7}{8}$ della somma intermedia meno uno è $\frac{7}{8}$ della somma intermedia meno $\frac{7}{8}$ di un denaro; quindi poiché il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma intermedia meno 6, e il secondo ha $\frac{7}{8}$ della stessa somma intermedia meno $\frac{7}{8}$ 3 denari, avranno insieme $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della stessa somma intermedia meno $\frac{7}{8}$ 9 denari, e poiché essi hanno la somma intermedia più 1, cioè la somma maggiore, $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma intermedia meno $\frac{7}{8}$ 9 denari sono tanti quanto la somma intermedia e 1 denaro; quando 1 denaro viene sottratto da entrambe le parti, rimane la somma intermedia uguale a $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ di essa meno $\frac{7}{8}$ 10 denari. Quindi si moltiplica il $\frac{7}{8}$ 10 per il 20, e lo si divide per il 17, e dal quoziente si sottrae il 6 che ha avuto il primo, e $\frac{5}{6}$ della somma intermedia, e si avranno $\frac{27}{34}$ 6 denari per il primo. Ancora, il $\frac{7}{8}$ 10 viene moltiplicato per il 21 e diviso per il 17,

e si sottrae $\frac{7}{8}$ 3, e si avranno $\frac{19}{34}$ 9 denari. Di nuovo, alternativamente, si vogliono ridurre i loro denari a parti della somma maggiore; poiché il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma intermedia meno 6 denari, avrà certamente $\frac{5}{6}$ della somma maggiore meno 6, e meno $\frac{5}{6}$ del denaro di cui la somma maggiore supera la somma intermedia, cioè $\frac{5}{6}$ di un denaro, più $\frac{5}{6}$ della somma intermedia. Quindi il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma maggiore meno $\frac{5}{6}$ 6 denari. Similmente, siccome il secondo ha $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 3 denari, avrà $\frac{7}{8}$ della somma maggiore meno 3 denari, e meno $\frac{7}{8}$ dei 2 denari di cui la somma maggiore supera la somma minore; poiché $\frac{7}{8}$ di 2 è $\frac{3}{4}$ 1, il secondo uomo ha $\frac{7}{8}$ della somma maggiore meno 3 denari e $\frac{3}{4}$ 1, cioè $\frac{3}{4}$ 4 denari, e come abbiamo detto, il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma maggiore meno $\frac{5}{6}$ 6; quindi insieme hanno $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma maggore meno $\frac{5}{6}$ 6 denari e $\frac{3}{4}$ 6, cioè $\frac{7}{12}$ 11 denari, e così ne hanno tanti quanto la somma maggiore. Quindi $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma maggiore superano la somma maggiore di $\frac{7}{12}$ 11. Perciò si moltiplica il $\frac{7}{12}$ 11 per il 20, e per il 21, e si divide ciascun prodotto per il 17, e dal primo quoziente si sottrae $\frac{5}{6}$ 6, e dal secondo quoziente si sottrae $\frac{3}{4}$ 4, e si hanno i loro denari. Come abbiamo fatto sopra con $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$, possiamo ancora procedere tre volte con $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$, così. Si è trovato che il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma minore e 5 denari in più, e il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma intermedia e 7 in più; potendo ridurre i loro denari a parti di una qualsiasi delle dette tre somme, le

riduciamo prima a parti della somma minore, di cui il primo ha $\frac{1}{8}$ e 5 denari in più, e poiché il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma intermedia e 7 in più, avrà $\frac{1}{6}$ della somma minore e 7 denari, ed inoltre $\frac{1}{6}$ del denaro che è la differenza tra la somma minore e la somma intermedia; quindi il secondo ha $\frac{1}{6}$ 7 denari più $\frac{1}{6}$ della somma minore. Quindi insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore e $\frac{1}{6}$ di 12 denari, la quale somma, essendo il totale di entrambi, è la somma maggiore, e la somma maggiore è 2 più la somma minore; quindi $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore con $\frac{1}{6}$ 12 denari sono tanto quanto la somma minore con 2 denari. Quindi se 2 viene sottratto da entrambe le parti, allora sarà $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore con $\frac{1}{6}$ 10 denari, tanto quanto la somma minore. E sottraendo $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ dalla somma minore, resta $\frac{1}{6}$ 10; si pone che la somma minore è 24, e si sottrae $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ di essa; ne rimangono 17, che dovrebbero essere $\frac{1}{6}$ 10. Si Moltiplica $\frac{1}{8}$ di 24, cioè 3, per $\frac{1}{6}$ 10, e si divide per 17; per $\frac{1}{8}$ della somma minore il quoziente è $\frac{27}{34}$ 1, a cui si aggiunge 5, che il primo ha in più di $\frac{1}{8}$ della somma minore; si ha $\frac{27}{34}$ 6, e il primo, come è stato trovato sopra, ne ha così tanti. E per la stessa ragione, si moltiplica $\frac{1}{6}$ di 24, cioè 4, per $\frac{1}{6}$ 10, e si divide per 17, poi si aggiunge al quoziente il numero $\frac{1}{6}$ 7 che il secondo ha più di $\frac{1}{6}$ della somma minore, e si hanno $\frac{17}{34}$ 9 denari per il secondo, come sopra. Tuttavia, volendo ridurre i loro denari a parti della somma intermedia, allora si trova che il primo ha $\frac{1}{8}$ della stessa somma intermedia e $\frac{7}{8}$ 4 denari in più, e il secondo ha $\frac{1}{6}$ della stessa somma e 7 denari in più, cioè, insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma intermedia e $\frac{7}{8}$ 11 denari. E

siccome tra loro hanno 1 denaro più della somma intermedia, cioè la somma maggiore, se ad ambedue le parti si sottrae 1, allora rimarranno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma intermedia e $\frac{7}{8}$ 10 denari, pari alla somma intermedia; e operando come fatto con la somma minore, si trovano i loro denari. Allo stesso modo si possono trovare i loro denari riducendo a parti della somma maggiore, di cui il primo ha $\frac{1}{8}$ e $\frac{3}{4}$ 4 denari in più, il secondo $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{6}$ 6 denari in più. E se i loro denari si riducono a parti di un'altra delle dette tre somme, allora si possiamo trovare le loro somme in un altro modo, poiché si è trovato che il primo aveva $\frac{1}{8}$ della somma minore e 5 denari in più, ovvero $\frac{5}{6}$ della stessa somma meno $\frac{1}{6}$ 5 denari; quindi, $\frac{1}{8}$ della somma minore più 5 denari sono tanto quanto $\frac{5}{6}$ della stessa somma meno $\frac{1}{6}$ 5 denari. E se ad entrambi si aggiunge $\frac{1}{6}$ 5, allora $\frac{1}{8}$ della somma minore più $\frac{1}{6}$ 10 denari sarà pari a $\frac{5}{6}$ della stessa somma; per cui, se da 20, cioè $\frac{5}{6}$ di 24, si sottrae $\frac{1}{8}$ di esso, allora resterà 17. Si moltiplica $\frac{1}{6}$ 10 per il 3, e si divide per il 17, e si aggiunge il 5 che il primo ha in più della somma minore. Oppure si moltiplica $\frac{1}{6}$ 10 per il 20, e si divide per il 17, poi si sottrae $\frac{1}{6}$ 5 che il primo ha, meno $\frac{5}{6}$ della stessa somma, e così si hanno i denari del primo uomo. Similmente, se secondo questo si considerera in due parti ciò che il primo ha in una qualsiasi delle restanti due somme, si potranno trovare i denari del primo, e allo stesso modo conoscere i denari del secondo. E anche qui si noterà che alcuni problemi simili sono irrisolvibili.

Un quarto metodo per problemi simili di due uomini.

Ci sono ancora due uomini, e il primo prende 7 dal secondo, e ne ha cinque volte il secondo e uno in più. Anche il secondo prende 5 dal primo, e ne ha sette volte il primo e altri 15. In questo problema la

somma maggiore è la somma di entrambi gli uomini, e la somma intermedia è 1 in meno. La somma minore è la stessa somma maggiore meno 15, e poiché il primo, avendo 7 dai denari del secondo, ha cinque volte il secondo e 1 in più, è necessario che il secondo uomo abbia $\frac{1}{6}$ della somma intermedia e 7 in più . Allo stesso modo, il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma minore e 5 di più, come abbiamo detto sopra. E poiché il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma intermedia e altri 7, è necessario per $\frac{1}{6}$ della somma intermedia che abbia la somma minore, e inoltre una sesta parte dei 14 denari di cui la somma intermedia supera la somma minore; perciò il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma minore e una sesta parte o 14, cioè $\frac{1}{3}$ 2, e 7 in più; ciò è $\frac{1}{6}$ 9 più di $\frac{1}{6}$ della somma minore; dalla quale somma, siccome il primo ha $\frac{1}{8}$ e 5 in più, insieme avranno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore e $\frac{1}{3}$ 14 denari, e avranno quindi la somma minore e 15 denari, cioè la somma maggiore. Se da entrambe le quote vengono sottratti $\frac{1}{3}$ 14 denari, rimarrà la somma minore con $\frac{2}{3}$ di un denaro, uguale a $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della stessa somma, il che è impossibile. Allo stesso modo, riducendo i loro denari a parti della somma intermedia, allora si troverà che il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma intermedia meno un ottavo di 14 denari, che è la differenza tra la somma minore e la somma intermedia e 5 denari in più ; da questo 5, si sottrae $\frac{1}{8}$ di 14, cioè $\frac{3}{4}$ 1; rimane $\frac{1}{4}$ 3; il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma intermedia e $\frac{1}{4}$ 3 di più; quindi insieme hanno $\frac{1}{4}$ 10 denari in più di $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma intermedia; hanno infatti 1 più la somma intermedia, cioè la somma maggiore; sottraendo 1 da entrambe le parti, rimanedella somma intermedia e $\frac{1}{4}$ 9 denari uguale alla somma intermedia. Perciò come nella suddetta dimostrazione per trovare i denari del primo, si moltiplica

$\frac{1}{8}$ 24, cioè 3, per $\frac{1}{4}$ 9, si divide il prodotto per 17, e poi si aggiungono $\frac{1}{4}$ 3 denari, che il primo ha più di $\frac{1}{8}$ della somma intermedia, e si hanno $\frac{15}{17}$ 4 per i denari del primo, che non è possibile in quanto è inferiore ai 5 che il secondo prende al primo uomo; lo stesso si troverà se si riducono le loro quote a parti della somma maggiore.

Il quinto metodo, anche su due uomini.

Ancora, il primo prende 7 dal secondo, ed ha 1 meno di cinque volte il secondo. Il secondo prende 5 dal primo ed ha 3 meno di sette volte il primo. Molti di questi problemi sono risolvibili e vengono risolti in quest'ordine; la quantità di denari di entrambi è detta somma minore; uno più la somma minore si chiama somma intermedia; due più la somma intermedia, o 3, cioè il 3 che manca al secondo, più la somma minore, si dice somma maggiore; e poiché il primo, avendo i 7 denari del secondo, ha 1 meno di cinque volte il secondo, se si aggiunge il denaro ai denari del primo ed ai 7 denari che si chiedono al secondo, allora il primo avrà $\frac{5}{6}$ della somma intermedia. Quindi la porzione del primo uomo è $\frac{5}{6}$ della somma intermedia meno i 7 denari che gli dà il secondo, e meno 1 denaro che si aggiunge al suo, cioè meno 8 denari, perché il secondo abbia $\frac{1}{6}$ della stessa somma intermedia, e i 7 suddetti denari. Allo stesso modo, dopo aver preso dal secondo, il primo avrà $\frac{1}{8}$ della somma maggiore e i 5 denari che gli ha dato il secondo. E il secondo ha $\frac{7}{8}$ della stessa somma maggiore, meno i 5, e i 3 che gli mancano per avere sette volte i denari del primo; perciò, si possono ridurre le loro quote a parti di una qualunque delle tre dette somme, e, come abbiamo fatto sopra, si può operare tre volte, una dopo l'altra. Ma affinché ciò sia mostrato chiaramente, riduciamo a parti della somma intermedia, secondo uno dei tre metodi; il secondo ha quindi $\frac{1}{6}$ della somma intermedia e 7 denari in più; il primo invece ha $\frac{1}{8}$ della somma maggiore e 5 denari. E poiché la somma

maggiore è 2 più la somma intermedia, vi sarà $\frac{1}{8}$ della somma maggiore più $\frac{1}{8}$ di 2 denari, cioè $\frac{1}{4}$ di un denaro, in più di $\frac{1}{8}$ della somma intermedia. Quindi $\frac{1}{8}$ della somma intermedia ed $\frac{1}{4}$ di un denaro è uguale a $\frac{1}{8}$ della somma maggiore. E poiché il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma maggiore e 5 denari, avrà $\frac{1}{5}$ 5 denari e $\frac{1}{8}$ della somma intermedia; perciò insieme hanno $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della somma intermedia e 7 denari, e 5, e $\frac{1}{4}$, cioè $\frac{1}{4}$ 12, e ne hanno tanti quanto la somma minore; quindi $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della somma intermedia e $\frac{1}{4}$ 12 denari sono tanti quanto la somma minore. Quindi se ad entrambe le parti si aggiunge 1, allora $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della somma intermedia e $\frac{1}{4}$ 13 denari saranno tanti quanto la somma intermedia, come è 1 più la somma minore. Quindi dalla somma si sottrae $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della somma intermedia; rimane $\frac{1}{4}$ 13, e si cerca $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della stessa somma; quindi si moltiplica $\frac{1}{8}$ di 24, cioè 3, per $\frac{1}{4}$ 13, e si divide per il 17, e si avrà $\frac{3\ \ 5}{4\ 17}$ 2 per $\frac{1}{8}$ della somma intermedia; a questo si aggiungono $\frac{1}{4}$ 5 denari, ottenendo $\frac{10}{17}$ 7 denari per il primo uomo. Inoltre si moltiplica $\frac{1}{6}$ di 24, cioè 4, per $\frac{1}{4}$ 13, e si divide per 17; il quoziente sarà $\frac{2}{17}$ 3 per $\frac{1}{6}$ della somma intermedia; a questo si aggiunge il 7 che ha il secondo in più di $\frac{1}{6}$ della somma intermedia, ottenendo $\frac{2}{17}$ 10 per la sua parte.

Tuttavia, da quanto detto, si può indagare a fondo se si propone che uno dei due superi la somma, e l'altro sia inferiore; per capire meglio si propone un problema simile in cui il primo, avendo 7 denari dal secondo, ha 6 più di cinque volte il secondo, e il secondo, avendo 5 denari del primo, ha sette volte il primo meno 8 denari. In questo problema la somma minore è il totale dei loro denari meno 6, da cui,

se non si dimentica come si è fatto sopra, si trova che il primo ha $\frac{5}{6}$ meno 1 denaro, e il secondo $\frac{1}{6}$ della stessa somma più 7 denari; la somma intermedia è certamente la quantità dei loro denari. La somma maggiore è sicuramente la somma intermedia più 8, di cui il primo ne ha $\frac{1}{8}$ e 5 denari in più; della stessa somma maggiore, il secondo ha $\frac{7}{8}$ meno i detti 5 denari, e poi meno gli 8 denari, il disavanzo, così ha sette volte i denari del primo uomo; ciò noto, le riduciamo a parti della somma intermedia, potendole anche ridurre a parti delle restanti somme. E lo facciamo secondo uno dei tre metodi con cui questo può essere fatto. Poiché la somma maggiore è 8 più la somma intermedia, l'ottava parte della somma maggiore sarà $\frac{1}{8}$ di 8 denari, cioè 1, più l'ottava parte della somma intermedia. Per cui il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma maggiore più 5 denari; ha similmente $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma intermedia più 6 denari. E poichè la somma minore è la somma intermedia meno 6, allora $\frac{1}{6}$ della somma minore sarà $\frac{1}{6}$ della somma intermedia meno la sesta parte di 6 denari, cioè 1; per cui, il secondo uomo ha $\frac{1}{6}$ della somma minore più 7 denari; egli avrà similmente $\frac{1}{6}$ della somma intermedia meno 1 denaro, più 7 denari, cioè 6 denari in più; quindi insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma intermedia, ed hanno anche 12 e la somma intermedia. Quindi $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma intermedia più 12 denari sono tanti quanto la somma intermedia; quindi se si sottrae $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma intermedia a se stessa, resta 12. Per cui, per avere $\frac{1}{8}$ della stessa somma intermedia, si moltiplica $\frac{1}{8}$ di 24, cioè 3, per il 12, e si divide per il 17; il quoziente sarà $\frac{2}{17}$ 2, a cui si aggiunge il 6 che il primo ha più di $\frac{1}{8}$ della somma intermedia; si ha $\frac{2}{17}$ 8, e il primo ne ha così tanti. Per

avere $\frac{1}{6}$ della somma intermedia, si moltiplica il 4 per il 12, si divide per il 17, e si aggiunge il 6 che il secondo ha più di $\frac{1}{6}$ della somma intermedia; il quoziente sarà $\frac{14}{17}$ 8 denari per il secondo uomo.

[Di nuovo, con il metodo diretto.]

Si può anche trovare quanti denari ha ciascuno con il metodo diretto, se si pone che il secondo abbia la cosa più 7 denari. Il primo ha cinque cose meno 1 denaro, perché quando il primo ha il 7 dal secondo, rimane una cosa per il secondo, e il primo avrà cinque cose meno 1 denaro, contando i 6 denari che ha, più cinque volte la cosa, meno i 7 denari che gli dà il secondo. Allo stesso modo, se il secondo ha 5 dal primo, allora rimangono per il primo cinque cose meno 6 denari, e il secondo avrà una cosa più 12 denari che con gli 8 denari è pari a sette volte i denari del secondo, cioè trentacinque cose meno 42 denari; aggiungendo 42 denari a ciascuna parte , 35 cose saranno uguali a una cosa più 62 denari, quindi si sottrae una cosa da ciascuna parte e rimarranno 34 cose pari a 62 denari, cioè 17 cose pari a 31 denari, perciò si divide il 31 per 17; risultano $\frac{14}{17}$ 1 denari per una cosa. E poiché il secondo ha una cosa più 7 denari, egli ha $\frac{14}{17}$ 8 denari; similmente, poiché il primo ha cinque cose meno 1 denaro, si moltiplica $\frac{14}{17}$ 1 per 5; ci sarà $\frac{2}{17}$ 9, da cui si sottrae 1; rimarranno $\frac{2}{17}$ 8 denari, e il primo ha tanto. Quindi con questo metodo si possono trovare soluzioni per tutti i problemi dei due uomini sopra scritti; tuttavia ci sono innumerevoli problemi simili per i quali non si possono trovare soluzioni, individuabili con il metodo sopra scritto.

Un problema simile tra tre uomini.

Tre uomini hanno denari, uno dei quali dice agli altri due: se mi date 7 dei vostri denari, ne avrò cinque volte quanto voi, Il secondo dice agli altri: se mi date 9 dei vostri denari, allora ne avrò sei volte quanto voi; il terzo prende 11 denari, e propone di averne sette volte quanto gli altri; si cerca quanti ne avrà ciascuno; qui il problema si risolve col

quinto metodo dell'albero, così: si vede quanta parte ciascuno avrà dell'intera loro somma di denari, avendo i denari che prende dagli altri; si fa così: il primo, prendendo 7 denari dagli altri, propone di averne cinque volte quanto loro; quindi ne ha cinque di ciascuna quantità, e gli altri due ne hanno uno della stessa quantità; quindi il primo ha $\frac{5}{6}$ del totale meno 7 denari; per lo stesso motivo il secondo ha $\frac{6}{7}$ dell'intera somma meno i 9 denari che prende agli altri; e similmente il terzo ha $\frac{7}{8}$ dell'intera somma meno gli 11 denari che prende agli altri; quindi essi hanno $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ dell'intera somma meno 7,9, e 11 denari, cioè 27 denari; quindi $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ dei loro denari aggiunti superano la loro somma di 27 denari; per cui questo problema è considerato un problema dell'albero: $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ dell'albero superano la lunghezza dell'albero di 27 palmi; quindi si trova il numero che è il minimo comune multiplo, cioè 168; di esso si prendono $\frac{5}{6}$ che è 140, $\frac{6}{7}$ che è 144, e $\frac{7}{8}$ che è 147, e si sommano insieme; si ha 431 da cui si sottrarre 168; rimane 263 che dovrebbe essere 27; quindi si moltiplica 140 per 27, e si divide per 263; il quoziente sarà $\frac{98}{263}$ 14 denari, e il primo uomo ne ha tanti, avendo 7 denari che prende dagli altri; quindi si sottrae il 7 dal $\frac{98}{263}$ 14; rimarranno $\frac{98}{263}$ 7 denari, e il primo ne ha tanti. Ancora, per avere i denari del secondo, si moltiplica il 144 per il 27, e si divide per il 263; il quoziente sarà $\frac{206}{263}$ 14, da cui si sottraggono i 9 denari che il secondo prende dagli altri; rimarranno $\frac{206}{263}$ 5 denari, e il secondo ne ha tanti. Inoltre, per avere i denari del terzo uomo, si moltiplica il 147 per il 27, e si divide ancora per il 263; il quoziente sarà $\frac{24}{263}$ 15 da cui si sottraggono gli 11 denari che prende il terzo; rimarranno $\frac{24}{263}$ 4 denari, e il terzo ne ha tanti. Quando il terzo prende dal secondo, e il secondo prende dal primo, e il primo dal terzo, si trova il metodo della soluzione nella quarta parte di questo capitolo, ed ancora nella seconda parte di

263 140
*
*
27 $\frac{98}{263}$ 14

263 144
*
*
27 $\frac{206}{263}$ 14

elchataym. .

Sullo stesso secondo un altro metodo.

Ci sono ancora tre uomini, e il primo, avendo 7 denari degli altri, ne ha cinque volte quanto loro, e uno in più. Il secondo, avendone 9 dagli altri, ne ha sei volte quanto loro, e uno in più; il terzo, avendone 11 dagli altri, ne ha sette volte quanto loro, e similmente uno di più. In questo problema però si considerano due somme, delle quali la maggiore è la quantità di denari di tutti e tre gli uomini, e la minore è la maggiore meno 1. E poiché il primo, con 7 denari degli altri, ha cinque volte quanto loro, e 1 in più, è necessario che abbia $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 denari, e quindi per lo stesso motivo, che il secondo, con 9 denari degli altri, abbia $\frac{6}{7}$ della stessa somma minore, meno 8 denari , avendone, con 9 denari, sei volte quanto gli altri, e 1 in più. Ancora il terzo, avendo 11 denari degli altri, non c'è dubbio che ne abbia sette volte quanto loro, cioè $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 10 denari; perciò fra di loro hanno $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6, 8 e 10 denari, cioè 24 denari, e tuttavia hanno fra loro la somma maggiore; quindi la somma minore meno 24 denari fa la somma maggiore. Quindi, se si sottrae l'1 per cui la somma maggiore supera la somma minore, resterà $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore meno 25 denari pari alla somma minore. E $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore superano la stessa somma di 25; quindi, come abbiamo fatto nel problema precedente, si moltiplica il 104 per il 25, e si divide per il 263, e si ha $\frac{81}{263}$ 13 per la somma minore, da cui si sottrae il 6 che ha il primo uomo meno di 5/6 della somma minore; rimarranno $\frac{81}{263}$ 7 denari, e il primo ne ha tanti. Inoltre, si moltiplica il 144 per il 25, e si divide per il 263, e si avrà $\frac{181}{263}$ 13 per $\frac{6}{7}$ della somma minore, da cui si sottrae 8 che ha il secondo uomo meno di $\frac{6}{7}$ della somma minore; rimarranno $\frac{181}{263}$ 5 denari, e il secondo ne ha tanti. Inoltre si

moltiplica il 147 per il 25, e si divide per il 263, e si avrà $\frac{256}{263}$ 13 per $\frac{7}{8}$ della somma minore, da cui si sottrae 10 che ha il terzo; rimarranno $\frac{256}{263}$ 3 denari, e il terzo ne ha tanti.

[Un altro metodo su tre uomini con denari.]

Ancora, il primo prende 7 dagli altri, ed ha 1 in più di cinque volte quello che hanno; il secondo ne prende 9, e ne ha 2 in più di sei volte il loro. Il terzo prende 11 dagli altri, e ne ha 3 in più di sette volte il loro. In questo problema si considerano quattro somme di cui la prima e la maggiore è l'importo di tutti i loro denari. La seconda è 1 in meno. La terza è la prima meno 2, o la seconda meno 1. La quarta è la minore ed è la prima meno 3, oppure la seconda meno 2, o la terza meno 1. E poiché il primo uomo, avendo 7 denari degli altri, ha cinque volte quanti ne hanno e 1 di più, occorre che abbia $\frac{5}{6}$ della seconda somma meno 6 denari, perché dei predetti 7 denari resta 1, senza il quale si fa la seconda somma. Da questo si capisce che il secondo ha $\frac{6}{7}$ della terza somma meno 7, in quanto supera di 2 il 9 che prende dagli altri. E il terzo ha 3, meno 11, cioè 8 meno di $\frac{7}{8}$ della somma minore; ciò noto, si possono ridurre i denari di ciascuno a parti di una qualsiasi delle quattro dette somme; si riducono alla somma minore, così: poiché la seconda somma è la somma minore più 2, allora $\frac{5}{6}$ della seconda somma sarà $\frac{5}{6}$ della somma minore più $\frac{5}{6}$ di 2 denari, cioè $\frac{5}{6}$ della somma minore più $\frac{2}{3}$ 1 denari. Quindi, siccome il primo uomo ha $\frac{5}{6}$ della somma del secondo meno 6, avrà $\frac{5}{6}$ della somma minore meno $\frac{1}{3}$ 4, perché quando si sottrae $\frac{2}{3}$ 1 da 6 rimane $\frac{1}{3}$ 4. Ancora, poiché la terza somma è la somma minore più 1, allora $\frac{6}{7}$ della terza somma saranno $\frac{6}{7}$ della somma minore più $\frac{6}{7}$ di un denaro. Per cui, siccome il secondo uomo ha $\frac{6}{7}$ della terza somma

meno 7, avrà $\frac{6}{7}$ della somma minore meno $\frac{1}{7}$ 6 denari, e il terzo uomo avrà ancora $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 8 denari; quindi insieme hanno $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore meno $\frac{1}{3}$ 4, $\frac{1}{7}$ 6 e 8 denari, cioè meno $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 18 denari; hanno ancora insieme la somma minore più 3, cioè la somma maggiore. Quindi sottraendo il 3 da entrambe le parti uguali, rimarrà $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore meno $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21 denari pari alla somma minore; quindi secondo quanto detto sopra, si moltiplica $\frac{5}{6}$ di 168, cioè 140, per $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21, si divide la somma per 263, e poi si sottrae $\frac{1}{3}$ 4 e si trova che il primo ha $\frac{26}{263}$ 7 denari. E si moltiplica $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21 per 144, cioè $\frac{6}{7}$ di 168, e si divide il prodotto per 163, e si sottrae $\frac{1}{7}$ 6 e si avranno $\frac{162}{263}$ 5 denari per il secondo uomo. Di nuovo si moltiplica $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21 per il 147, cioè $\frac{7}{8}$ di 168, e si divide per il 263, e poi si sottrae l'8, e si avranno $\frac{1}{263}$ 4 denari per il terzo uomo; dal suddetto materiale si può intendere chiaramente e completamente se alle somme si sottrae qualcosa, e se si opera con più uomini quando uno di loro toglie agli altri.

Un altro metodo tra tre uomini.

Di nuovo ci sono tre uomini, e il primo e il secondo prendono 7 denari dal terzo, e ne hanno cinque volte quanto lui. Il secondo e il terzo prendono 9 denari dal primo, e ne hanno sei volte quanto lui. Il terzo e il primo prendono 11 dal secondo, e ne hanno sette volte quanto lui. Poiché il primo e il secondo, avendo 7 denari dal terzo, ne hanno cinque volte quanto lui, è necessario che il terzo uomo abbia $\frac{1}{6}$ dell'intera somma e 7 denari in più. Similmente, a causa della presa dalle parti degli altri uomini, si intende allora che il primo ha $\frac{1}{7}$ dell'intera somma e 9 denari in più, il secondo $\frac{1}{8}$ della stessa somma

e 11 denari in più; quindi tra tutti loro hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{7}\frac{1}{6}$ della somma più 27 denari. Perciò si pone che tutti loro abbiano 168, di cui $\frac{1}{6}$, cioè 28, e $\frac{1}{7}$, cioè 24, e $\frac{1}{8}$, cioè 21, che sommati fanno 73, e che sottratti da 168 danno 95, che dovrebbe essere 27, per avere $\frac{1}{6}$ della loro intera somma; si moltiplica 27 per 28 e si divide per 95; il quoziente sarà $\frac{91}{95}$ 7 a cui si aggiunge il 7 che ha il terzo uomo più $\frac{1}{6}$ dell'intera somma; ci saranno $\frac{91}{95}$ 14 denari, e questo ha il terzo uomo. Inoltre si moltiplica il 27 per il 24, si divide per il 95, e si aggiunge 9 al quoziente; si avrà $\frac{78}{95}$ 15, e il primo ha tanti denari. Ancora, si moltiplica il 27 per il 21, si divide per il 95, e si aggiunge 11 al quoziente; si avrà $\frac{92}{95}$ 16, e il secondo ha tanti denari; si potrà operare con molti uomini secondo questo metodo, quando gli altri, prendendo da uno di loro una quantità, ottengono un multiplo di esso. Inoltre, se non si dimentica quanto sopra, si potrà operare con un eccesso o un deficit di quantità.

Lo stesso con quattro uomini, un problema irrisolvibile.

Quattro uomini hanno denari; il primo e il secondo prendono 7 denari dagli altri, e il primo e il secondo propongono di averne il triplo degli altri. Il secondo e il terzo prendono 8 dagli altri, e ne hanno quattro volte quanto gli altri. Il terzo e il quarto prendono 9 dagli altri e ne hanno cinque volte gli altri. Il quarto e il primo prendono 11, e ne hanno sei volte di più; si cerca quanti ne ha ciascuno. Questo problema è irrisolvibile e viene così riconosciuto. Siccome il primo e il secondo con 7 denari degli altri ne hanno il triplo, allora questa sarà $\frac{3}{4}$ dell'intera somma di denari, e resterà $\frac{1}{4}$ della stessa somma per il terzo e il quarto uomo; quindi tra il terzo e il quarto uomo hanno $\frac{1}{4}$ dell'intera somma e altri 7 che hanno dato al primo e al secondo uomo. Allo stesso modo, dalle prese e dalle proposte, si trova che il quarto e il primo uomo hanno $\frac{1}{5}$ dell'intera somma, e 8 denari in più,

e tra il primo e il secondo $\frac{1}{6}$ della detta somma e 9 denari, e tra il secondo e il terzo $\frac{1}{7}$ della stessa somma e 11 denari in più. E poiché il primo e il secondo hanno tra loro $\frac{1}{6}$ dell'intera somma e 9 denari, e il terzo e il quarto hanno tra loro $\frac{1}{4}$ della stessa somma e 7 denari, allora fra tutti e quattro avranno $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$ della detta somma e 16 denari. Quindi la somma meno $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$ della stessa somma lascia 16; questo numero si trova con il secondo metodo dell' albero, ed è $\frac{3}{7}$ 27. Ancora, poiché il quarto e il primo hanno $\frac{1}{5}$ dell'intera somma e 8 denari, e il secondo e il terzo hanno $\frac{1}{7}$ e 11 denari, allora la somma dei denari di tutti e quattro gli uomini sarà $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ della stessa somma e 19 denari. Quindi l'intera somma meno $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ della stessa somma lascia 19; si trova, con lo stesso metodo dell'albero, la somma di $\frac{21}{23}$ 82, che è incoerente con quella trovata con la prima indagine, che era diversa, cioè $\frac{3}{7}$ 27; per cui questo problema non è risolvibile. Se si vuole proporre un problema risolvibile, il primo e il secondo prendono dagli altri 100 denari, il secondo e il terzo, 106 denari, il terzo e il quarto, 145 denari, il quarto e il primo, 170, e si trova da entrambe le indagini che la somma di tutti i denari essere 420, di cui il primo e il secondo hanno tra loro $\frac{1}{6}$ della somma più 145, cioè 215 denari; il secondo e il terzo hanno tra loro $\frac{1}{7}$ dello stesso 420 più 170, cioè 230, il terzo e il quarto hanno tra loro $\frac{1}{4}$ dei 420 più altri 100, cioè 205, e il quarto e il primo hanno tra loro $\frac{1}{5}$ dei 420 più 106 denari, cioè 190, che si assegnano fra loro a piacimento, cioè, avendo il primo e il secondo 215, che il primo abbia 100, e il secondo 115; il secondo, avendo col terzo uomo 230, sottratti i 115 che ha il secondo; rimangono 115 denari per il terzo; il terzo, ha col quarto uomo 205, si sottrae il 115

che ha il terzo; e rimangono 90 per il quarto uomo.

Un problema simile su cinque uomini.

Ancora, ci sono cinque uomini, e il primo, il secondo e il terzo prendono 7 denari dal quarto e dal quinto uomo, e ne hanno il doppio. Il secondo, il terzo e il quarto prendono 8 denari dal quinto e dal primo e ne hanno il triplo. Il terzo, il quarto e il quinto prendono 9 denari dal primo e dal secondo e ne hanno quattro volte tanto. Il quarto, il quinto e il primo prendono 10 denari dal secondo e dal terzo e ne hanno cinque volte di più. Il quinto, il primo e il secondo prendono 11 denari dal terzo e dal quarto e ne hanno sei volte di più. Poiché il primo, il secondo e il terzo con i 7 denari del quarto e del quinto ne hanno il doppio, è necessario che il primo, il secondo e il terzo abbiano $\frac{2}{3}$ dell'intera somma meno 7, e il quarto e il quinto abbiano $\frac{1}{3}$ della stessa somma più 7. Allo stesso modo conoscendo le prese e le proposte di tutti, il quinto e il primo hanno tra loro $\frac{1}{4}$ dell'intera somma più 8 denari. Il primo e il secondo hanno tra loro $\frac{1}{5}$ dell'intera somma più 9 denari. Il secondo e il terzo hanno tra loro $\frac{1}{6}$ dell'intera somma più 10 denari. Il terzo e il quarto hanno fra loro $\frac{1}{7}$ dell'intera somma più un denaro; per cui hanno fra tutti loro la metà di $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ della somma, e la metà dei 7, 8, 9, 10, e 11 denari, cioè di 45 denari, poiché ogni parte e i numeri sono stati contati due volte. Quindi, si trova il minimo comune multiplo delle parti di $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, che è 420, che si raddoppia a causa della moltiplicazione per due; si ha 840, e si prende $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 420, e si sottrae da 840; rimane 381 che dovrebbe essere 45. Perciò si moltiplicha il 45 per il 420, si divide per il 381, e si avrà $\frac{77}{127}$ 49 per l'intera somma; il quarto e il quinto hanno fra loro una terza parte più 7, cioè $\frac{68}{127}$ 23. Il quinto e il primo hanno fra loro una quarta parte più 8, cioè $\frac{51}{127}$ 20.

Il primo e il secondo hanno fra loro una quinta parte e altri 9, cioè18. Il secondo e il terzo hanno tra loro una sesta parte e altri 10, cioè $\frac{34}{127}$ 18. E il terzo e il quarto hanno tra loro una settima parte della stessa somma e altri 11, cioè $\frac{11}{127}$ 18. Poi, per separare i denari di uno dai denari degli altri, si aggiungono i denari del primo e del secondo, cioè $\frac{117}{127}$ 18, ai denari del terzo e del quarto, cioè $\frac{11}{127}$ 18; si ha $\frac{1}{127}$ 37; il quinto uomo ha la differenza tra questo e l'intera somma, cioè $\frac{77}{127}$ 49; la differenza è $\frac{76}{127}$ 12; questo viene sottratto dai denari del quinto e del primo; resterà $\frac{12}{127}$ 7 per il primo; questo viene sottratto ai denari del primo e del secondo; resterà $\frac{15}{127}$ 11 per il secondo; questo viene sottratto dai denari del secondo e del terzo; rimarrà $\frac{19}{127}$ 7 per il terzo uomo; questo viene sottratto dai denari del terzo e del quarto; ne rimarranno $\frac{119}{127}$ 10 per il quarto uomo.
In un altro modo, poiché il secondo e il terzo, come si è mostrato sopra, hanno $\frac{1}{6}$ dell'intera somma dei cinque uomini più 10 denari, e il quarto e il quinto hanno tra loro $\frac{1}{3}$ della stessa somma più 7 denari, i quattro hanno tra loro $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$, cioè $\frac{1}{2}$ della somma, più 17 denari. Quindi per il primo resta $\frac{1}{2}$ della stessa somma meno 17. Similmente il terzo e il quarto hanno tra loro $\frac{1}{7}$ della somma più 11 denari, e il quinto e il primo hanno tra loro $\frac{1}{4}$ della somma più 8 denari; quindi i quattro hanno $\frac{1}{7}\frac{1}{4}$, cioè $\frac{11}{28}$ della somma più 19 denari; quindi per il secondo uomo resta la differenza, cioè $\frac{17}{28}$ della somma meno 19. Allo stesso modo, se si somma la porzione di quarto e quinto con la porzione di primo e secondo, cioè $\frac{1}{3}$ della somma e 7 denari con $\frac{1}{5}$ della somma e 9 denari, allora ci saranno $\frac{8}{15}$ della

somma più 16 denari che sottratti dalla somma lasciano $\frac{7}{15}$ della somma meno 16 denari. Inoltre aggiungendo la porzione del quinto e del primo alla porzione del secondo e del terzo, cioè $\frac{1}{4}$ della somma e 8 denari a $\frac{1}{6}$ della somma e 10 denari, si hanno $\frac{5}{12}$ della somma e 18 denari. Rimangono dunque per il quarto uomo $\frac{7}{12}$ della somma meno 18 denari. Di nuovo, aggiungendo la parte del primo e del secondo alla parte del terzo e del quarto, cioè $\frac{1}{5}$ della somma e 9 denari a $\frac{1}{7}$ della somma e 11 denari, si hanno $\frac{12}{35}$ della somma e 20 denari; quindi rimangono per il quinto uomo $\frac{23}{35}$ della somma meno 20 denari. Inoltre, per trovare la porzione di ciascuno in ordine, si può operare con il primo metodo su tre uomini.

Su un uomo che si precipita a Costantinopoli
per vendere tre perle.

Un certo mercante porta tre perle a Costantinopoli per venderle. Una di esse vale un certo importo, la seconda il doppio della prima, e la terza, a sua volta, il doppio della seconda meno un terzo di un bisante. Il compenso commerciale di Costantinopoli esige un decimo delle suddette perle per la provvigione. Il mercante vende la prima perla, cioè la meno pregiata, e paga la decima richiesta di tutte le suddette perle, e quello che avanzava dà $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda perla, e $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti in più. Si cerca il prezzo di ogni perla; si fa così: si pone un numero qualunque per il prezzo della prima perla; diciamo 10; la seconda sarà 20, e la terza sarà $\frac{2}{3}$ 39 cioè il doppio del prezzo della seconda perla meno $\frac{1}{3}$ di un bisante; sommando il tutto si ottiene $\frac{2}{3}$ 69 bisanti; di questo si prende $\frac{1}{10}$, cioè $\frac{2\;\;9}{3\;\;10}$ 6; la differenza tra questo e il 10, cioè 1 0/3 10 $\frac{1\;\;0}{3\;\;10}$ 3, è il prezzo della prima perla; da questo si sottrae $\frac{1}{8}$ di 20, cioè il prezzo della seconda

perla, cioè $\frac{1}{2}$ 2; rimane $\frac{16}{20}$ che si sottrae da $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21; il risultato è $\frac{9}{10}$ 20 che si mantiene. Si pone questo problema: la prima perla vale una certa somma, la seconda il doppio e la terza il quadruplo della prima. La tariffa commerciale è sottratta dal prezzo della prima perla, e rimane $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda, e $\frac{9}{10}$ 20 bisanti. Poi si mette arbitrariamente 20 per il prezzo della prima perla, 40 per la seconda, e 80 per la terza, che sommati fanno 140; di questi $\frac{1}{10}$, cioè 14, si sottrae da 20, cioè dal prezzo della prima perla; resta 6 da cui si sottrae $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda perla, cioè $\frac{1}{8}$ di 40, cioè 5; rimane 1 che dovrebbe essere $\frac{9}{10}$ 20; si moltiplica il $\frac{9}{10}$ 20 per il 20 e si divide per 1; il quoziente sarà 418 a cui si aggiungono 10 bisanti che abbiamo messo per la prima perla; ci saranno 428 bisanti per il prezzo della prima perla. Quindi il prezzo della seconda è 856, e della terza $\frac{2}{3}$ 1711.

Sullo stesso con il metodo diretto.

Si pone per la cosa il prezzo della prima perla. Quindi il prezzo della seconda sarà due cose; il terzo sarà quattro cose meno $\frac{1}{3}$ di un bisante; tutte sommate sono sette cose meno $\frac{1}{3}$ di un bisante; di questo $\frac{1}{10}$, cioè $\frac{7}{10}$ di una cosa meno $\frac{1}{30}$ di un bisante, si sottrae da una cosa, cioè dal prezzo della prima perla; rimarranno $\frac{3}{10}$ della cosa e $\frac{1}{30}$ di un bisante, che sono pari a $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda perla e $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti, cioè quattro volte la prima perla e $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti. E se $\frac{1}{30}$ di un bisante viene sottratto da entrambe le parti, rimarranno $\frac{3}{10}$ della cosa che sono uguali a $\frac{1}{4}$ della cosa più $\frac{2}{5}$ 21 bisanti. Ancora, $\frac{1}{4}$ della cosa viene sottratto da entrambe le parti;

resterà $\frac{1}{20}$ della cosa uguale a $\frac{2}{5}$ 21 bisanti. Quindi una cosa è uguale a 428 bisanti; quindi il prezzo della prima perla è 428, come abbiamo detto prima. Esiste poi un altro metodo, chiamato metodo indiretto, mediante il quale si possono risolvere molti problemi; con il metodo diretto si va dall'inizio alla fine del problema, e con il metodo indiretto si fa il contrario, cosa che mostreremo in questo problema, dove si pone che $\frac{1}{10}$ del prezzo delle tre perle è superato dal prezzo della prima perla di $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda più $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti; da questo si comincia: poiché il prezzo della seconda perla è doppio del prezzo della prima, $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda è quanto $\frac{1}{4}$ del prezzo della prima. Quindi, del prezzo della prima perla, cioè della cosa, ne resterà la quarta parte e $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti in più, dopo il pagamento del predetto $\frac{1}{10}$ di provvigione; e $\frac{1}{10}$, come abbiamo detto sopra, fa $\frac{7}{10}$ della cosa meno $\frac{1}{30}$ di un bisante. Ma poiché dalla cosa viene sottratto un quarto di essa e $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti, rimarranno $\frac{3}{4}$ della cosa meno $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti, che sono uguali a $\frac{7}{10}$ della cosa meno $\frac{1}{30}$ di un bisante. E se a entrambe le parti si aggiungono $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti, allora $\frac{3}{4}$ della cosa saranno uguali a $\frac{7}{10}$ della cosa più $\frac{2}{5}$ 21 bisanti. Quindi se $\frac{7}{10}$ della cosa vengono sottratti da entrambe le parti, resterà $\frac{1}{20}$ della cosa uguale a $\frac{2}{5}$ 21 bisanti, come abbiamo trovato con il metodo diretto.

Ancora su tre perle.

La seconda perla vale un quarto di bisante più il doppio del prezzo della prima. La terza vale il doppio della seconda meno un terzo di bisante. Se si vuole trovare la soluzione di questo problema con il metodo diretto, allora si pone che la prima valga la cosa. Quindi la seconda varrà due cose più un quarto di bisante. E la terza varrà

quattro cose più un sesto di bisante; le tre sommate faranno sette cose più un quarto e un sesto di bisante; si sottrae un decimo del totale, cioè $\frac{7}{10}$ della cosa più $\frac{1}{24}$ di un bisante, da una cosa, cioè dal prezzo della prima perla; rimane $\frac{3}{10}$ della cosa meno $\frac{1}{24}$ di un bisante che è uguale a $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda più $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti. Ma $\frac{1}{8}$ della seconda è uguale a un quarto della prima più $\frac{1}{32}$ di un bisante; quindi $\frac{3}{10}$ della cosa meno $\frac{1}{24}$ di bisante sono uguali a $\frac{1}{4}$ della cosa più $\frac{1}{32}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bezants. Se ad entrambe le parti si aggiunge $\frac{1}{24}$ di un bisante, allora $\frac{3}{10}$ della cosa saranno uguali a un quarto della cosa più $\frac{1}{32}\frac{1}{24}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti; e se $\frac{1}{4}$ della cosa viene sottratto da entrambe le parti, rimane $\frac{1}{20}$ della cosa uguale a $\frac{1}{32}\frac{1}{24}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bisanti; e si moltiplica $\frac{1}{32}\frac{1}{24}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 per 20, rendendo la cosa intera; il prodotto si fa comunemente così: prima si moltiplica il 21 per il 20 e si ha 420, e $\frac{1}{3}$ per 20, dà $\frac{2}{3}$ 6, e $\frac{1}{10}$ per 20, dà 2, e $\frac{1}{24}$ per 20, dà $\frac{5}{6}$, e $\frac{1}{32}$ per 20, dà $\frac{5}{8}$; questi sommati danno $\frac{1}{8}$ 430 per il primo prezzo. Quindi il secondo prezzo è $\frac{1}{2}$ 860, e il terzo $\frac{2}{3}$ 1720; questo problema e simili sono perciò risolvibili con il primo metodo, ed inoltre con il metodo indiretto.

Su tre uomini che prendono in modo diseguale da una borsa.

Tre uomini trovano una collezione di bisanti da cui ciascuno prende in modo diseguale, in modo che la moltiplicazione dei bisanti del primo per un terzo della somma fa quanto la moltiplicazione dei bisanti del secondo per un quarto della somma, e quanto la moltiplicazione dei bisanti del terzo per un quinto della stessa somma. E questi tre prodotti sommati fanno la stessa somma di bisanti che i tre uomini hanno trovato. Si cerca quanto è la somma, e quanto ciascuno prende da essa. Perciò si pone che il primo prende 3 bisanti, il secondo 4 e il

terzo 5; la moltiplicazione di un qualsiasi numero per una terza parte di 3 è tanto quanto la moltiplicazione dello stesso numero per una quarta parte di 4, o una quinta parte di 5, e quindi la moltiplicazione di un terzo di qualsiasi numero per 3 è tanto quanto la moltiplicazione di un quarto dello stesso numero per 4, e quanto la moltiplicazione di un quinto dello stesso numero per 5; si sommano il 3, il 4 e il 5; si ha 12 per la somma dei bisanti trovati; quindi si moltiplica il 3, cioè i bisanti del primo, per un terzo della somma, cioè per 4, e si ha 12 che si tiene; si moltiplicano i bisanti del secondo, cioè 4, per la quarta parte della somma, cioè 3; similmente si ha 12 che si tiene, e si moltiplicano ancora i 5 bisanti del terzo per un quinto della somma, cioè $\frac{2}{5}$ 2, ed ancora si ha 12. Sommati quindi i tre prodotti, si ha 36 che dovrebbe essere 12; perciò si dice: quando metto 3 per la quantità dei bisanti del primo, ottengo 36; cosa devo mettere in modo che il totale risulti 12? Si moltiplica dunque il 3 per il 12, e si divide per il 36; il quoziente è 1, e questo prende il primo uomo dai bisanti trovati. Sempre per lo stesso motivo, si moltiplica il 4, cioè i bisanti del secondo, per il 12, e si divide per il 36; il quoziente è $\frac{1}{3}$ 1 bisanti, e questo prende il secondo uomo dai bisanti. Ancora, si moltiplicano i 5 bisanti del terzo uomo per 12, e si divide ancora per 36; il quoziente è $\frac{2}{3}$ 1 bisanti per l'importo che prende il terzo uomo.

36 5 4 3
12

In un altro modo, per $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ soprascritti si mette 3, 4, 5, e si sommano; si ha 12 che si divide per il numero degli uomini, cioè per 3; il quoziente è 4, e questo è il numero di bisanti trovato; di questo il primo prende $\frac{3}{3}$ cioè 1 bisante, il secondo $\frac{4}{3}$ cioè $\frac{1}{3}$ 1 bisanti, il terzo prende $\frac{5}{3}$, cioè $\frac{2}{3}$ 1 bisanti, come abbiamo detto prima.

primo 1
secondo $\frac{1}{3}$ 1
terzo $\frac{2}{3}$ 1

Sullo stesso per cinque uomini.

Ancora, cinque uomini trovano una somma di bisanti; ancora una volta ciascuno prende in modo diseguale da loro, in modo che la moltiplicazione dei bisanti del primo per un terzo della somma fa quanto la moltiplicazione dei bisanti del secondo per un quarto della somma, e quanto la moltiplicazione dei bisanti del terzo per un quinto della stessa somma, e quanto la moltiplicazione dei bisanti del quarto

per un sesto della somma. E inoltre, quanto la moltiplicazione dei bisanti del quinto per un settimo della stessa somma, e questi cinque prodotti, sommati, fanno la stessa somma trovata. Questo problema può essere risolto con il primo metodo dell'albero; tuttavia vogliamo mostrare come risolverlo in un altro modo. Per i suddetti $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$ si mettono in ordine 3, 4, 5, 6 e 7, e si sommano; saranno 25, e così tanto i cinque trovano; perciò, ci saranno 5 prodotti, di cui il primo dei cinque prende $\frac{3}{5}$ di un bisante, il secondo $\frac{4}{5}$, il terzo $\frac{5}{5}$, che è 1 bisante, il quarto $\frac{6}{5}$, che è $\frac{1}{5}$ 1, il quinto $\frac{7}{5}$, cioè $\frac{2}{5}$ 1 bisanti.

somma	*terzo*
5	1
primo	*quarto*
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$ 1
secondo	*quinto*
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$ 1

Ancora su cinque uomini.

Di nuovo cinque uomini trovano dei bisanti; ciascuno prende in modo diseguale da questi, così che la moltiplicazione dei bisanti del primo per un terzo della somma, cioè la moltiplicazione dell'intera somma per la terza parte dei bisanti del primo uomo, fa un certo numero. E la moltiplicazione della quarta parte dell'intera somma per i bisanti del secondo uomo, e viceversa, fa raddoppiare la moltiplicazione fatta dei bisanti del suddetto primo uomo. E la moltiplicazione dei bisanti del terzo per la quinta parte della somma, e viceversa, fa triplicare la moltiplicazione fatta dei bisanti del secondo, cioè sestuplica la moltiplicazione fatta dal primo. E la moltiplicazione dei bisanti del quarto per la sesta parte della somma, e viceversa, fa quadruplicare la moltiplicazione fatta dal terzo uomo, cioè dà ventiquattro volte la moltiplicazione fatta dal primo uomo. E ancora, la moltiplicazione dei bisanti del quinto uomo per la settima parte della somma, e la settima parte dei bisanti del quinto per l'intera somma, fa quintuplicare la moltiplicazione fatta dal quarto uomo, cioè dà centoventi volte la moltiplicazione fatta dal primo uomo. E questi cinque prodotti sommati fanno la stessa somma trovata. Si cerca questa somma, e quanto ne prende ciascuno. Poiché è stato proposto che la moltiplicazione dell'intera somma per la terza parte dei bisanti del primo uomo faccia un certo numero, si pone che il primo uomo prende un certo numero di bisanti, di cui si ha $\frac{1}{3}$. Si dice quindi che prende

3 bisanti. Perché la terza parte è 1 bisante, che moltiplicato per la somma dei bisanti fa un certo numero, cioè la stessa somma. E poiché si propone che la moltiplicazione della quarta parte dei bisanti del secondo uomo per l'intera somma, faccia raddoppiare la moltiplicazione della terza parte dei bisanti del primo per la stessa somma, si dice che il secondo prende un certo numero di bisanti di cui la quarta parte è il doppio della terza parte dei bisanti del primo; e sarà il numero 8, di cui la quarta parte è 2, che è il doppio della terza parte dei bisanti del primo, cioè 1. Ancora, poiché la moltiplicazione della quinta parte dei bisanti del terzo per l'intera somma fa triplicare la moltiplicazione della quarta parte dei bisanti del secondo per la stessa somma, occorre che il terzo uomo prenda tanti bisanti, che la quinta parte sia tripla della quarta parte dei bisanti del secondo; perciò si mette che prende 30 bisanti, di cui la quinta parte, cioè 6 bisanti è il triplo della quarta parte dei bisanti del secondo, cioè 2. E poiché la moltiplicazione della sesta parte dei bisanti del quarto uomo per la suddetta somma, fa quadruplicare la moltiplicazione della quinta parte dei bisanti del terzo per la somma, si pone che il quarto uomo prenda tanti bisanti, che una sesta parte quadruplichi la quinta parte dei bisanti del terzo; e sono 144 bisanti di cui la sesta parte è 24 bisanti, che sono il quadruplo della quinta parte dei bisanti del terzo, cioè 6. Ancora, poiché moltiplicare la settima parte dei bisanti del quinto per l'intera somma, quintuplica la moltiplicazione della sesta parte dei bisanti del quarto uomo per la somma, si deve porre che il quinto uomo prenda 840 bisanti, per cui, la settima parte che è 120 bisanti, è quintupla di 24 bisanti, vale a dire della sesta parte dei bisanti del quarto uomo. Fatto ciò, si sommano i bisanti posti sopra, cioè i 3 bisanti del primo uomo, gli 8 bisanti del secondo, i 30 bisanti del terzo, i 144 bisanti del quarto e gli 840 bisanti del quinto; si hanno 1025 bisanti, che sono il numero dei bisanti posti per la somma trovata; poi si vede di quanto la moltiplicazione per la somma aumenta i cinque numeri sopra scritti. Il prodotto della terza parte dei bisanti del primo per la somma, cioè l'1 per il 1025, fa una volta 1025; quindi si tiene l'1 da parte. La moltiplicazione della quarta parte dei bisanti del secondo, cioè 2, per la somma, cioè per il 1025, fa due volte 1025; perciò si tiene il 2. La quinta parte dei bisanti del terzo uomo, cioè 6, moltiplicato per il 1025, fa sei volte 1025; quindi si tiene il 6. La sesta parte dei bisanti del quarto uomo, cioè 24, moltiplicata per 1025 fa 24 volte 1025; quindi si tiene il 24; infine, la

settima parte dei bisanti del quinto uomo, cioè 120 bisanti, moltiplicata per la somma suddetta, cioè per il 1025, fa centoventi volte 1025; quindi si tiene il 120, che aggiunto ai tenuti 24, 6, 2 e 1, dà 153; quindi, il totale dei cinque numeri sopra scritti sarà centocinquantatre volte 1025, e poiché i cinque numeri aggiunti devono fare quanto una volta la somma, si dice: quando si pone 3 per la presa di bisanti del primo uomo, risulta centocinquantatre volte la somma; cosa si deve porre in modo che risulti solo una volta la somma? Si moltiplica il 3 per l'1 e si divide per il 153; il quoziente sarà $\frac{3}{153}$ di un bisante, e questo prende il primo uomo dalla somma trovata. Allo stesso modo si opera per i bisanti presi dai restanti quattro uomini, vale a dire gli 8 bisanti del secondo uomo, i 30 bisanti del terzo uomo, i 144 bisanti del quarto uomo e gli 840 bisanti del quinto uomo. Si trova che il secondo uomo prende $\frac{8}{153}$ di un bisante dalla somma trovata, il terzo prende $\frac{30}{153}$, il quarto prende $\frac{144}{153}$ e il quinto prende $\frac{840}{153}$, cioè $\frac{75}{153}$ 5 bisanti; perciò i cinque uomini insieme prendono $\frac{1025}{153}$, cioè $\frac{107}{153}$ 6 bisanti, e tanti ne trovarono.

Su due uomini che trovano bisanti.

Due uomini trovano dei bisanti, da cui ciascuno prende inegualmente, e quello che prende il primo è $\frac{1}{13}\frac{1}{3}$ di quello che prende il secondo, e il primo, traendo profitto dalla sua parte, fa 12 bisanti da ogni 11 bisanti. L'altro fa 14 bisanti da ogni 13 bisanti, e tra loro due hanno 100 bisanti. Si cerca quanto è la somma trovata, e quanto ciascuno prende da essa. S trova prima il numero che è il minimo comune denominatore di $\frac{1}{13}\frac{1}{3}$, ed è 39, e si pone che tanto prenda il secondo uomo, di cui si prende $\frac{1}{13}\frac{1}{3}$, cioè 16, e si pone questo per l'acquisizione del primo uomo; siccome questo fa 12 bisanti ogni 11, si moltiplica il 16 per 12 e si divide per l1; il quoziente sarà $\frac{5}{11}$ 17 bisanti, che si tiene; poi, poiché il secondo fa 14 da ogni 13, si moltiplica il 39 per il 14, e si divide per il 13; il quoziente sarà di 42

bisanti che aggiunti ai $\frac{5}{11}$ 17 fanno $\frac{5}{11}$ 59 bisanti, che dovrebbero essere 100; perciò, si moltiplica il 16 per il 100, e si divide per il $\frac{5}{11}$ 59; il quoziente sarà di $\frac{1\ \ 99}{3\ \ 109}$ 26 bisanti per la parte del primo uomo. Per lo stesso motivo, si moltiplica il 39 per 100 e si divide per $\frac{5}{11}$ 59; il quoziente sarà di $\frac{65}{109}$ 65 bisanti per la parte del secondo uomo, che sommati ai $\frac{1\ \ 99}{3\ \ 109}$ 26 bisanti del primo uomo danno $\frac{1\ \ 55}{3\ \ 109}$ 92 bisanti per la somma totale.

primo

$\frac{1\ \ 99}{3\ \ 109}$ 26

secondo

$\frac{65}{109}$ 65

La partizione di 11 in due parti.

Si divida 11 in due parti in modo che una parte moltiplicata per 9 sia uguale all'altra parte moltiplicata per 10; prima si considera che la moltiplicazione di una parte di un numero per il numero da cui ha origine la parte fa tanto quanto la moltiplicazione di un'altra parte dello stesso numero per il numero da cui ha origine la parte. Ad esempio, la moltiplicazione di un terzo di un numero per 3, da cui ha origine $\frac{1}{3}$, fa quanto la moltiplicazione di un quarto dello stesso numero per 4, da cui ha origine $\frac{1}{4}$; quindi, il nono di un numero moltiplicato per 9 fa quanto fa $\frac{1}{10}$ dello stesso numero moltiplicato per 10. Quindi, vi è una proporzione fra un decimo di numero ed un nono dello stesso numero, uguale a quella fra una parte di 11 ed un'altra parte. Per cui, si trova un numero che è il minimo comune denominatore di $\frac{1}{10}\frac{1}{9}$, ed è 90, di cui $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{9}$ sono 10 e 9; quindi il prodotto del 9, vale a dire un decimo del 90, e il 10, fa tanto quanto il prodotto del 10, cioè $\frac{1}{9}$ di 90, e il 9; si sommano il 9 e il 10 e si ha 19 che dovrebbe essere 11; quindi, si moltiplica il 10 per l'11 e si dividi per il 19; il quoziente sarà $\frac{15}{19}$ 5 e questa sarà una parte; la differenza tra questa e 11 sarà l'altra parte, cioè $\frac{4}{19}$ 5; questo numero sarà il prodotto di 9 e 11, diviso per 19. In altro modo, poiché il

prodotto della prima parte e il 9 è uguale al prodotto della seconda parte e il 10, proporzionalmente 10 sta a 9 come la prima parte sta alla seconda. Per cui, 9 più 10, cioè 19, starà al totale delle parti, cioè 11, come 10 sta alla prima parte, e 9 alla seconda. Quindi l'11 si moltiplica per il 10, e per il 9, ed entrambi i prodotti si dividono per il 19.

[Sulla stessa con il metodo diretto.]

Se si vuole procedere con il metodo diretto, allora si pone che la prima parte sia la cosa; perciò la seconda sarà 11 meno la cosa, e si moltiplica la cosa, cioè la prima parte, per il 9; ne risultano nove cose. Si moltiplica 11 meno la cosa, cioè la seconda parte, per 10; si ha che 110 meno dieci cose sono uguali a nove cose; quindi se dieci cose sono sommate a entrambe le partii, allora ci saranno 19 cose pari a 110; si divide quindi il 110 per il 19; si avrà $\frac{15}{19}$ 5 per la prima parte che sottratta dall'11 dà $\frac{4}{19}$ 5 per la seconda parte, come abbiamo trovato sopra.

La partizione di 11 in tre parti.

Inoltre, se si vuole ripartire 11 in tre parti, la prima delle quali moltiplicata per 4 fa tanto quanto un'altra moltiplicata per 5, e come un'altra moltiplicata per 6, allora, poiché la moltiplicazione di un quarto di un numero per 4 fa quanto la moltiplicazione di un quinto dello stesso numero per 5, e tanto quanto la moltiplicazione di un sesto dello stesso numero per 6, si trova il minimo comune denominatore di $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, e sarà 60, di cui un quarto è 15, un quinto è 12, un sesto è 10; quindi si sommano 15, 12 e 10, e si ha 37, che dovrebbe essere 11; perciò si moltiplicano il 15, 12, e 10, singolarmente per 11, e si divide ogni prodotto per 37, e quindi si avrà $\frac{17}{37}$ 4 per la prima parte, $\frac{21}{37}$ 3 per la seconda, $\frac{36}{37}$ 2 per la terza, e cos' si può ripartire 11, e qualsiasi altro numero, in più parti.

La partizione di 11 in due parti con un altro metodo.

Ancora, se si propone di ripartire 11 in due parti, in modo che

moltiplicando la prima parte per 9 si ha $\frac{1}{4}\,30$ in più rispetto all'altra parte moltiplicata in modo simile per 9, allora, poiché la parte maggiore moltiplicata per 9 fa $\frac{1}{4}\,30$ più dell'altro prodotto, si divide $\frac{1}{4}\,30$ per 9; $\frac{1\ \ 3}{4\ \ 9}\,3$ sarà il quoziente, e di tanto la parte maggiore supera la minore; questo $\frac{1\ \ 3}{4\ \ 9}\,3$ moltiplicato per 9 fa $\frac{1}{4}\,30$; quindi si sottrae $\frac{1\ \ 3}{4\ \ 9}\,3$ dall'11; si ha $\frac{3\ \ 5}{4\ \ 9}\,7$, cioè $\frac{23}{36}\,7$, che si divide in due parti uguali; il quoziente sarà $\frac{59}{72}\,3$ per ciascuna parte, e questa è la parte minore; la differenza tra questa e l'11, vale a dire $\frac{13}{72}\,7$, fa l'altra.

prima parte

$\frac{59}{72}\,3$

seconda

$\frac{13}{72}\,7$

Ancora sulla stessa.

Se si propone di dividere 11 in due parti in modo che la seconda parte moltiplicata per 10 fa $\frac{1}{4}\,30$ in più della prima parte moltiplicata per 9, allora si sottrae all'11 il numero che moltiplicato per 10 fa $\frac{1}{4}\,30$; questo numero si trova dividendo $\frac{1}{4}\,30$ per 10, esso è $\frac{1}{40}\,3$, che sottratto all'11 dà $\frac{39}{40}\,7$, che si divide in due parti con la regola sopra scritta, in modo che la moltiplicazione della prima parte per il 9 fa quanto l'altra parte per 10; la prima parte sarà $\frac{3\ \ 7\ \ 14}{4\ \ 10\ \ 19}\,3$; trovato questo , viene sottratto dall'11, cosa che si fa con il metodo mostrato nel decimo capitolo; cioè, si prende il 3 che è sopra il 4, e lo si sottrae dal 4, e il resto si mette sopra il 4 di una certa linea di frazione sotto la quale sono in ordine le sopra scritte parti frazionarie, vale a dire $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 10\ \ 19}$; e per il 4 completato si tiene 1, che si aggiunge al 7 che sta sopra il 10; si ha 8, che sottratto dal 10 fa 2 che si mette sopra il 10, e per il dieci completato si tiene 1 che si aggiunge al 14 che è sul 19; si ha 15, che sottratto dal 19 lascia 4, che si mette sopra il 19 sulla linea di frazione; e per il 19 completato si tiene 1, che si aggiunge al 3 che sta prima della frazione, e si sottrae il 4 dall'11; resta 7 che si mette prima della frazione estesa, e quindi si ha $\frac{1\ \ 2\ \ 4}{4\ \ 10\ \ 19}\,7$ per la

prima parte

$\frac{3\ \ 7\ \ 14}{4\ \ 10\ \ 19}\,3$

seconda

$\frac{1\ \ 2\ \ 4}{4\ \ 10\ \ 19}\,7$

seconda parte.

[Ancora sulla stessa.]

Ancora, si propone di suddividere 11 in tre parti in modo che la seconda parte moltiplicata per 5 fa 10 in più rispetto alla moltiplicazione della prima parte per 4, e la moltiplicazione della terza parte per 6 fa 11 in più della moltiplicazione della seconda parte per 5, cioè 21 in più della moltiplicazione della prima parte per 4. Quindi, l'ultima parte moltiplicata per 6 fa 21 più la moltiplicazione del prima parte per 4; per cui, se dall'ultima parte viene sottratto il numero che moltiplicato per 6 fa 21, cioè $\frac{1}{2}$ 3, che risulta dalla divisione di 21 per 6, allora rimane dall'ultima parte un numero che moltiplicato per 6 fa quanto la prima parte moltiplicata per 4. E poiché la seconda parte moltiplicata per 5 fa 10 in più della prima parte moltiplicata per 4, se dalla seconda parte viene sottratto il numero che moltiplicato per 5 fa 10, cioè 2, allora resterà dalla seconda parte un numero che moltiplicato per 5 fa quanto il primo moltiplicato per 4; perciò, da 11 si sottraggono 2 e $\frac{1}{2}$ 3; rimarrà $\frac{1}{2}$ 5 che si divide secondo la regola sopra scritta in tre parti, in modo che la seconda moltiplicata per 5 e la terza moltiplicata per 6 facciano quanto la prima moltiplicata per 4; e la prima parte sarà $\frac{1\ \ 8}{2\ \ 37}$ 2, la seconda $\frac{0\ \ 29}{2\ \ 37}$ 1, la terza $\frac{0\ \ 18}{2\ \ 37}$ 1; perciò, si aggiunge il 2 alla seconda parte; si avrà $\frac{29}{37}$ 3; poi si aggiunge $\frac{1}{2}$ 3 alla terza parte; si avrà $\frac{1\ \ 36}{2\ \ 37}$ 4, e così si può fare con problemi simili.

prima
$\frac{1\ \ 8}{2\ \ 37}$ 2
seconda
$\frac{0\ \ 29}{2\ \ 37}$ 3
terza
$\frac{1\ \ 36}{2\ \ 37}$ *4*

Su due numeri trovati secondo una certa proporzione data.

Ci sono due numeri, uno è $\frac{1}{7}$ dell'altro, e il loro prodotto è quanto la loro somma. Prima si trovano due numeri in modo che $\frac{1}{5}$ di uno sia $\frac{1}{7}$ dell'altro, e saranno 5 e 7, per i numeri cercati, e si aggiunge il 5 al 7; si ha 12. Ma il 5 moltiplicato per il 7 fa 35, che dovrebbe essere 12; si moltiplica il 12 per il 5, e il 12 per il 7, e si dividono entrambi i

35 7 5
* *
* *
12

prodotti per il 35, e si avrà $\frac{5}{7}$ 1 per il primo numero, $\frac{2}{5}$ 2 per il secondo; o altrimenti si divide il 12 sopra scritto per il 7, e per il 5.

Ancora.

Si propone che una quinta parte di un numero si aggiunga ad una settima parte di un altro facendo quanto il prodotto dei due numeri; si aggiunge un quinto di 5, cioè 1, a $\frac{1}{7}$ di 7; si ha 2 che si moltiplica per 5, e per 7, e si dividono entrambi i prodotti per 35; oppure si divide il 2 per il 7, e per il 5, e si avrà $\frac{2}{7}$ per il primo numero, e $\frac{2}{5}$ per il secondo.

1	7		5
	*		*
	*	*	
	12		

Ancora.

Si propone che una quinta parte di un numero moltiplicata per una settima parte dell'altro faccia quanto l'addizione dell'uno con l'altro; si moltiplica un quinto di 5 per $\frac{1}{7}$ di 7, cioè 1 per 1; si avrà 1, e si aggiunge il 5 al 7 come sopra; si ha 12 che si moltiplica per il 5, e per il 7, e si dividono entrambi i prodotti per l'1, che era il prodotto dei suddetti uno e uno, e si avrà 60 per il primo numero, di cui un quinto è 12; il secondo è 84, di cui un settimo è ancora 12, come dovrebbe essere, perché il prodotto di 12 per 12 fa quanto la somma di 60 e 84.

Un altro metodo per trovare due numeri.

Ancora un quinto di un numero è un settimo di un altro, e una quinta parte dell'uno moltiplicata per una settima parte dell'altro fa quanto una quinta parte dell'uno sommata alla settima parte dell'altro; si moltiplica l'1 per l'1, come sopra; si ha uno, e si sommano gli uni insieme; si ha 2, per cui si moltiplica il 5 per il 7, e si dividono entrambi i prodotti per uno, e si avrà 10 per il primo numero e 14 per il secondo.

Un altro problema su due numeri.

Si propone che un numero moltiplicato per un altro faccia un multiplo

della loro somma, diciamo il doppio; si aggiunge 5 al 7; si ha 12 che si raddoppia; si ha 24; si moltiplica quindi il 24 per il 5, e il 24 per il 7, e si dividono entrambi i prodotti per il 5 per 7, cioè 35, e si avrà $\frac{3}{7}$ 3 per il primo numero, e $\frac{4}{5}$ 4 per il secondo; si noti che in tutti i problemi sopra scritti, e nei problemi successivi, si fa sempre la divisione del numero che risulta dal multiplo della somma dei numeri.

Un altro problema su due numeri.

Ancora si propone che la somma di due numeri faccia un multiplo del loro prodotto, e diciamo il triplo; si moltiplica il 12 che è la somma di 5 e 7 per gli stessi numeri; si ha 60 e 84 che si divide per il detto multiplo del prodotto del 5 e del 7, cioè per il triplo di 35, cioè 105, e si avrà $\frac{4}{7}$ per il primo numero, ep $\frac{4}{5}$ er il secondo.

105	7		5
	*		*
	*	*	
	12		

Ancora su un altro problema.

Ancora, il prodotto di due numeri fa un certo multiplo, diciamo che quadruplica la somma di una quinta parte di un numero e di una settima parte dell'altro; il quadruplo di 2, somma di un quinto di 5 e di un settimo di 7, è 8; lo si moltiplica per il 5 e per il 7; si hanno 40 e 56 che divisi per il prodotto del 5 e del 7, cioè 35, danno $\frac{1}{7}$ 1 per il primo numero, e $\frac{3}{5}$ 1 per il secondo.

35	7		5
	*		*
	*	*	
	8		

[Sullo stesso.]

Ancora, la somma di una quinta parte dell'uno e di una settima parte dell'altro quintuplica il prodotto di un numero per l'altro; si moltiplica il 2 sopra scritto per il 5, e per il 7; si hanno 10 e 14 che divisi per il quintuplo di 35, cioè 175, danno $\frac{2}{35}$ per il primo numero, e $\frac{2}{25}$ per il secondo.

Ancora un altro problema su due numeri.

Il prodotto di una quinta parte di un numero e di una settima parte di

un altro è sestuplo della somma delle stesse parti; si sommano $\frac{1}{5}$ 5 e $\frac{1}{7}$ 7; si ha 2, il cui sestuplo, cioè 12, si moltiplica per il 5, e per il 7; si hanno 60 e 84, che divisi per il prodotto di una quinta parte del 5 e una settima parte del 7, cioè per uno, danno 60 per il primo numero, e 84 per il secondo.

1 7 5
* *
* *
12

Sullo stesso secondo un'altra partizione.

Ancora, la somma di una quinta parte di un numero e di una settima parte di un altro fa il settuplo del prodotto delle stesse parti; si moltiplica 2 per 5 e per 7; si hanno 10 e 14 che divisi per sette volte il prodotto di una quinta parte del 5 e una settima parte del 7, cioè per 7, danno $\frac{3}{7}$ 1 per il primo numero, e 2 per il secondo; si possono proporre molti altri problemi diversi da quelli sopra scritti per i quali le soluzioni possono essere trovate con i metodi sopra scritti.

7 7 5
* *
* *
2

Un'altra partizione in due numeri.

Ci sono due numeri tali che $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ dell'uno è $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro, e il loro prodotto è uguale alla loro somma; prima si trovano due numeri per cui $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ dell'uno è $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro, e sono 27 e 35, e al 35 si aggiunge il 27; si ha 62, per cui si moltiplica il 27 e il 35, e si dividono entrambi i prodotti per 27 volte il 35, oppure si divide il 62 per il 35 e per il 27 e si avrà $\frac{27}{35}$ 1 per il primo numero e $\frac{8}{27}$ 2 per il secondo.

945 35 27
* *
* *
62

Sulla stessa.

Si propone che il prodotto di uno dei detti numeri per l'altro sia il doppio della loro somma; il doppio di 62, cioè 124, si moltiplica per 27, e per 35, e si dividono entrambi i prodotti per 27 e per 35, oppure si divide il 124 per 35, e per 27, e si avrà $\frac{19}{35}$ 3 per il primo numero, e $\frac{16}{27}$ 4 per il secondo.

935 35 27
* *
* *
124

Sulla stessa.

Se la somma dei due numeri è il doppio del prodotto degli stessi, allora i prodotti del 62 per il 27, e del 62 per il 35, si dividono per il doppio del 27 per il 35, oppure si divide il 62 per il doppio del 35 e il doppio del 27, e si avrà $\frac{31}{35}$ per il primo numero e $\frac{1}{27}$ 1 per il secondo.

Sulla stessa.

Ancora, $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del primo numero è $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ del secondo, e il prodotto del primo per il secondo fa quanto la somma delle parti, o di qualunque parte del primo e del secondo si voglia; la somma di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del primo e $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro, diremo, è tanto quanto il prodotto di un numero per l'altro; si prende $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 27, cioè $\frac{3}{4}$ 15 e si aggiunge a $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ di 35, cioè $\frac{3}{4}$ 15; si ha $\frac{1}{2}$ 31; si moltiplica il $\frac{1}{2}$ 31 per il 27, e il $\frac{1}{2}$ 31 per il 35, e si dividono entrambi i prodotti per 27 volte 35, oppure si divide il 231 per il 35 e per il 27, e si avrà $\frac{9}{10}$ per il primo numero, e $\frac{1}{6}$ 1 per il secondo.

945 35 27
* *
* *
$\frac{1}{2}$ 31

Sulla stessa.

E se il prodotto dei numeri è il quadruplo della somma di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'uno e $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro, allora il quadruplo di $\frac{1}{2}$ 31, cioè 126, si moltiplica per 27, e per 35, e si dividono entrambi i prodotti per 27 e per 35, oppure si divide il 126 per 35, e per 27 e si avrà $\frac{3}{5}$ 3 per il primo numero e $\frac{2}{3}$ 4 per il secondo.

[Sulla stessa.]

E se la moltiplicazione di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del primo numero per $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ del secondo è tanto quanto la somma del primo e del secondo numero, allora, poiché $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di 27 e $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ di 35 non sono interi, in quanto fanno $\frac{3}{4}$ 15, il 27 e il 35 devono essere moltiplicati per 4; si hanno 108 e 140, e si prende $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del 108, cioè 63, e si moltiplica per il 63, cioè $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ del 140; si avrà 3969; e si aggiunge il 108 al 140; si ha 248 che si moltiplica per 108, e per 140, e si dividono entrambi i prodotti, con la regola, per 3969, annullando quello che si può annullare, e si avrà $\frac{2\ \ 1\ \ 5}{3\ \ 7\ \ 7}$ 6 per il primo numero, e $\frac{4\ \ 6\ \ 6}{7\ \ 9\ \ 9}$ 8 per il secondo numero.

3969	140	108
	*	*
	* *	
	248	

Sulla stessa.

E se il prodotto di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del primo e $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ del secondo è quintuplo della somma dei numeri, allora il quintuplo di 248, cioè 1240, si moltiplica per il 108, e per il 140, e si dividono entrambi i prodotti con la regola per 3969, e si annulla, e si avrà $\frac{1\ \ 1\ \ 5}{3\ \ 7\ \ 7}$ 33 per il primo numero, e $\frac{6\ \ 5\ \ 6}{7\ \ 9\ \ 9}$ 43 per il secondo.

[Sulla stessa.]

Ancora, diciamo che la $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del primo numero è $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ del secondo, e il prodotto di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del primo e $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ del secondo è uguale alla somma di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del primo numero e $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ del secondo; si aggiunge 63 a 63, cioè $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di 108 e $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ di 140; si avrà 126 per cui si moltiplica 108 e 140, e si dividono entrambi i prodotti per il 2969, e si annulla, e si

3969	140	108
	*	*
	* *	
	126	

avrà $\frac{3}{7}$ 3 per il primo numero, e $\frac{4}{9}$ 4 per il secondo.

Sulla stessa.

E se il prodotto di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'uno e $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro è sestuplo della somma di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'uno e $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro, allora si moltiplica il sestuplo di 126 per 108, e per 140, e si dividono entrambi i prodotti per 3969, e si cancella ciò che si può cancellare, e si avrà $\frac{4}{7}$ 20 per il primo numero, e $\frac{2}{3}$ 26 per il secondo.

3969 140 108
* *
* *
756

[Sulla stessa.]

E se la somma di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'uno e $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro è settupla del prodotto di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'uno e $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro, allora si moltiplica 126 per 108, e per 140; e si divide il septuplo per il 3969, e si cancella, e si avrà $\frac{3}{7}\frac{3}{7}$ per il primo numero, e $\frac{5}{7}\frac{5}{9}$ per il secondo.

Sulla ricerca di due numeri che sono in una data proporzione.

Ho sottratto $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di un numero da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di un altro, e ho moltiplicato la differenza per $\frac{1}{4}$ 9, e ho avuto 100; allora si divide 100 per $\frac{1}{4}$ 9, e $\frac{30}{37}$ 10 sarà il quoziente. Si cercano due numeri per cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di uno supera $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ dell'altro di $\frac{30}{37}$ 10; si pone 30 per il primo numero e 24 per il secondo; poi si sottrae $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ del 30, cioè 11, da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del 24, cioè 14; rimane 3 che dovrebbe essere $\frac{30}{37}$ 10. Si moltiplica il $\frac{30}{37}$ 10 per il 30, e per il 24, e si dividono entrambi i prodotti per il 3; i quozienti saranno $\frac{4}{37}$ 108 per il primo numero, e $\frac{18}{37}$ 86 per il secondo,

oppure si ha 30 per il primo numero, e ad $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di esso si aggiunge $\frac{30}{37}$ 10; si avrà $\frac{30}{37}$ cioè $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del secondo numero. Perciò si moltiplica il 12 per $\frac{30}{37}$ 21 e si divide per 7. E se vuoi, da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del secondo numero 24, si sottrae $\frac{30}{37}$ 10; si avrà 7/37 $\frac{7}{37}$ 3, cioè $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ del primo numero. E si proponga che $\frac{2}{3}$ del primo sia $\frac{3}{5}$ dell'altro; prendiamo 9 e 10, che moltiplicati per 30, per avere numeri interi, danno 270 per il primo numero, e 300 per il secondo; si sottrae $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di 270, cioè 99, da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 300, che è 175; ne restano 76 che dovrebbero essere $\frac{30}{37}$ 10; si moltiplica $\frac{30}{37}$ 10 per 270 e per 300 e si dividono entrambi i prodotti per 76; i quozienti saranno $\frac{1\;\;15}{19\;\;37}$ 38 per il primo numero e $\frac{18\;\;24}{19\;\;37}$ 42 per il secondo. E se si vuole, la moltiplicazione per se stessa della differenza che c'è tra $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ del primo numero e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del secondo numero fa uno dei due numeri, diciamo il primo; ponendo al primo numero un numero avente una radice per cui $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di essa sia un numero intero, e ad $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di 900 ne aggiungi la radice, cioè 30; si avrà 360; quindi si trova un numero per cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso è 360, cioè il prodotto di 12 e 360; si divide per 7; il quoziente sarà $\frac{1}{7}$ 617 per il secondo numero. Ancora, se si vuole che la moltiplicazione della suddetta differenza per se stessa faccia il secondo numero, allora si mette il secondo numero a 144; da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, cioè 84, si sottrae la radice, cioè 12; resta 72. Si trova quindi il numero per cui $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di esso è 72, e si avrà per il secondo numero $\frac{4}{11}$ 196. Ancora, moltiplicando $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ del primo numero per $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del secondo, si ha 100. Si trovano due numeri che moltiplicati insieme fanno 100; siano 5 e 20; quindi, per il primo numero si avrà il numero

per cui $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di esso è 5, e si avrà il numero di cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ è 20, per il secondo numero. Quindi si moltiplica il 30 per il 5, e si divide per l'11, e si moltiplica il 12 per il 20, e si divide per il 7, e si avrà $\frac{7}{11}$ 13 per il primo numero, e $\frac{2}{7}$ 34 per il secondo. Inoltre poiché 10 moltiplicato per se stesso dà 100, si trova per il primo numero il numero per cui $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di esso è 10, e sarà $\frac{3}{11}$ 27, e per il secondo si trova il numero per cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso è 10, e sarà $\frac{1}{7}$ 17, e quindi si possono risolvere infiniti problemi simili, con i metodi ad albero.

La successione di Fibonacci

Quante coppie di conigli discendono in un anno da una coppia.

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. Poiché la suddetta coppia si riproduce nel primo mese, devi raddoppiarla: nel primo mese le coppie saranno 2. Di queste, la prima, nel secondo mese ne genera un'altra: quindi nel secondo mese ci sono 3 coppie. Di queste, durante il mese, due si riproducono e nel terzo mese, generano 2 coppie: quindi, nel terzo mese, ci sono 5 coppie di conigli. Di queste, durante il mese, 3 si riproducono e nel quarto mese ci sono 8 coppie. Di queste, al quinto mese, 5 coppie ne generano altre 5 che aggiunte alle 8 coppie esistenti fanno 13 coppie. Di queste, le 5 generate nel mese precedente non generano nel sesto mese, ma le altre 8 si riproducono, quindi nel sesto mese ci sono 21 coppie. Aggiungendo a queste altre 13 coppie generate nel settimo mese, ci saranno in quel mese 34 coppie. Aggiungendo a queste altre 21 coppie generate nell'ottavo mese, ci saranno in quel mese 55 coppie. Aggiungendo a queste, altre 34 coppie generate nel nono mese, ci saranno in quel mese 89 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 55 coppie generate, nel decimo ci saranno 144 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 89 coppie generate nell' undicesimo mese, ci saranno in quel mese 233 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste anche 144 coppie generate nell'ultimo mese, ci saranno 377 coppie. Tante sono le coppie generate dalla coppia iniziale in quel luogo in capo ad un anno.Puoi inoltre vedere in questo margine come abbiamo operato: abbiamo sommato il primo numero con il secondo, cioè 1 e 2; il secondo con il terzo, il terzo con il quarto, il quarto con il quinto e così via finché abbiamo sommato il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233 ed abbiamo ottenuto la somma dei suddetti conigli, cioè 377; e così si può fare per un numero infinito di mesi.

Coppie
1
Primo
2
Secondo
3
Terzo
5
Quarto
8
Quinto
13
Sesto
21
Settimo
34
Ottavo
55
Nono
89
Decimo
144
Undicesimo
233
Dodicesimo
377

Il contributo del Fibonacci alla scoperta della sua famosa "successione" è tutto qui! Probabilmente si tratta della semplice esposizione divulgativa di un problema già noto ai suoi tempi. Le meravigliose proprietà di questa successione sono state scoperte dagli studiosi in epoche successive.

La leggenda di Sissa Nassir

Sulla duplicazione delle case di una scacchiera
ed alcuni altri metodi. *(dalla parte nona)*

Proponiamo di duplicare le caselle di una scacchiera, utilizzando un metodo duplice: una scacchiera con una sequenza di caselle in cui ciascun numero è il doppio del suo antecedente e un'altra con una sequenza di caselle con numeri che sono ciascuno la somma di tutti i numeri precedenti. Mostriamo ora come si può eseguire la duplicazione. Per prima cosa si eseguono i raddoppi, posto dopo posto, raddoppiando il posto precedente, fino alla fine; l'altro modo si esegue raddoppiando la quantità del primo posto, si ha due, il due si moltiplica per sé; si ha 4, che supera di 1 il totale dei due primi posti. Per esempio, nel primo posto si mette 1, nel secondo 2, che aggiunto al primo fa 3; questo tre più 1 dà il 4 scritto sopra; si moltiplica il 4 per sé, dà 16, che supera di 1 la somma del doppio dei primi 2 posti, cioè 4 posti. Per esempio, nel primo c'è 1, nel secondo 2, nel terzo 4, nel quarto 8, che sommati insieme fanno 15, che è di 1 inferiore a 16. Inoltre moltiplicando il 16 per sé, si ha 256 che è di 1 più grande della somma delle potenze di due nel doppio dei 4 posti sopra scritti, cioè gli 8 posti che formano la prima fila della scacchiera. Per esempio, nel primo è 1, nel secondo 2, nel terzo 4, nel quarto 8, nel quinto 16, nel sesto 32, nel settimo 64, nell'ottavo 128, che sommati insieme fanno 255, cioè 256 meno 1, come abbiamo detto prima; quindi, 256 moltiplicato per se stesso fa 65536, che è di 1 più grande della somma delle potenze nel doppio della prima fila, vale a dire nei primi 16 posti; quindi, per lo stesso motivo, si moltiplica il 65536 per se stesso, ottenendo 4294967296, che similmente è di 1 più grande della somma delle potenze di due sul doppio di due file, ossia su 32 posti, che costituiscono la metà della scacchiera. Infine, moltiplicando il 4294967296 per sé, si ottiene 18446744073709551616 che è di 1 più grande della somma delle potenze di due sull'intera scacchiera; questo numero, moltiplicato per sé, eccede di 1 la somma delle potenze di due su due scacchiere, cioè 340 282 366 920 938 463 483 374 607 431 768 211 456, e quindi, moltiplicando, possiamo procedere senza fine. Ma quando il numero dei raddoppi diventa una moltitudine, non si è più in grado di seguire la procedura; cercheremo di spiegare ciò

città
65536
case
65536
scrigni
65536
bisanti
65536

più chiaramente. Dalla somma di due file di scacchiera, vale a dire da 16 posti, otteniamo 65536, e con questi riempiamo uno scrigno; allora, raddoppiamo questo scrigno, e quindi avremo due scrigni da inserire nel diciassettesimo posto, che è il primo della terza fila; nel secondo posto della stessa fila avremo 4 scrigni, nel terzo 8, nel quarto 16, nel quinto 32, nel sesto 64, nel settimo 128, e nell'ultimo posto della stessa fila 256 scrigni. Nel primo posto della quarta riga avremo 512 scrigni, nel secondo 1024, nel terzo 2048, nel quarto 4096, nel quinto 8192, nel sesto 16384, nel settimo 32768, e nell'ultimo posto avremo 65536 scrigni; con questi scrigni riempiamo una casa, allora avremo nel primo posto della quinta fila 2 case, nel secondo 4, nel terzo 8, e quindi, raddoppiando in tal modo, avremo nell'ultimo posto in sesta fila 65536 case. Con queste case facciamo una città, e continuiamo con il raddoppio nei restanti posti; allora avremo nell'ultima posizione della scacchiera 65536 città; quindi la somma di tutti i numeri sulla scacchiera ammonta a 65536 città; ogni città ha 65536 case, in ogni casa ci sono 65536 scrigni, e in ogni scrigno ci sono 65536 bisanti. Per effetto della dimostrazione suddetta si deve avere in ogni scrigno 1 bisante in meno.

Nel *Liber Abaci* Leonardo Pisano introduce le cifre indo - arabiche ed espone un nuovo sistema, basato sulla numerazione posizionale, per eseguire le operazioni aritmetiche fra numeri interi,
Gli antichi romani, che avevano già acquisito l'idea di valore posizionale, usavano i sassolini (calculi in latino), per eseguire i calcoli.
Gli arabi introdussero le cifre indiane, in sostituzione dei sassolini dei romani, e svilupparono con queste un nuovo metodo per calcolare, o algoritmo, che diffuso poi dal Fibonacci con il *Liber Abaci*, ha fornito agli uomini del Rinascimento quanto occorreva per compiere il grande e decisivo progresso, al di là della matematica greca, verso la matematica moderna.